

Spis treści

Przedmowa	15
Oznaczenia	19
Rozdział 1. Ogólne wiadomości na temat ustrojów powierzchniowych	23
1.1. Wprowadzenie	23
1.2. Układy współrzędnych, powierzchnia środkowa, przekrój normalny, linie głównych krzywizn	24
1.3. Geometria powierzchni środkowej	26
1.4. Geometria powierzchni równo oddalonej od środkowej	28
1.5. Uogólnione przemieszczenia i odkształcenia zgodne z hipotezą kinematyczną trójparametrowej teorii powłok Kirchhoffa-Love'a (K-L)	29
1.6. Uogólnione przemieszczenia i odkształcenia zgodne z hipotezą kinematyczną pięcioparametrowej teorii powłok Mindlina-Reissnera (M-R)	32
1.7. Uogólnione siły przekrojowe na powierzchni środkowej	33
1.8. Uogólnione odkształcenia na powierzchni środkowej	35
1.9. Klasyfikacja powłok	36
1.9.1. Ustroje powierzchniowe cienkie, umiarkowanie grube, grube	36
1.9.2. Ustroje powierzchniowe zakrzywione wyniosłe, mało wyniosłe i płaskie	37
1.9.3. Ustroje powierzchniowe o różnym rozkładzie naprężeń wzdłuż grubości	38
1.10. Opis geometrii wybranych powierzchni	38

1.10.1. Powierzchnia kulista w układzie współrzędnych sferycznych	38
1.10.2. Powierzchnia walcowa we współrzędnych cylindrycznych	40
1.10.3. Paraboloida hiperboliczna we współrzędnych kartezjańskich	41

Rozdział 2. Równania teorii sprężystości dla zagadnień trójwymiarowych 42

Rozdział 3. Równania powłok cienkich według teorii trójparametrowej Kirchhoffa-Love'a 47

3.1. Ogólne równania powłok cienkich w układzie głównych linii krzywizn	47
3.2. Specyfikacja parametrów Lamego i głównych promieni krzywizn dla typowych powierzchni	52
3.2.1. Powłoki obrotowo symetryczne opisane we współrzędnych sferycznych	52
3.2.2. Powłoki obrotowo symetryczne opisane we współrzędnych walcowych	53
3.2.3. Powłoki mało wyniosłe na rzucie prostokątnym	54
3.2.4. Tarcze i płyty w układzie kartezjańskim lub biegunowym	55
3.3. Przejście od ogólnych równań powłok do szczególnych przypadków UP	56
3.3.1. Równania tarcz prostokątnych w układzie kartezjańskim	56
3.3.2. Równania zginanych cienkich płyt prostokątnych w układzie kartezjańskim	57
3.3.3. Równania zamkniętych powłok walcowych w układzie cylindrycznym w osiowo symetrycznym stanie membranowo-giętnym	58
3.4. Uwagi końcowe	59

Rozdział 4. Opis elementów skończonych do analizy ustrojów powierzchniowych metodą elementów skończonych(MES) 65

4.1. Ogólne informacje o elementach skończonych dla UP	65
4.2. Charakterystyka wybranych ES dla UP	67
4.2.1. Tarczowy element skończony prostokątny 4-węzłowy	67

4.2.2.	Płytkowy dostosowany element skończony 4-węzłowy prostokątny stosowany do dyskretyzacji cienkich płyt opisanych teorią K-L	70
4.2.3.	Płaskie powłokowe niedostosowane ES 3-, 4-węzłowe dla cienkich powłok K-L	73
4.2.4.	Zakrzywione dwuwymiarowe ES dla powłok cienkich opisanych trójpparametrową teorią K-L	74
4.2.5.	Zakrzywione powłokowe ES oparte na pięcioparametrowej teorii umiarkowanie grubych powłok M-R . . .	76
4.2.6.	Powłokowe ES zdegenerowane	76
4.2.7.	Powłokowe ES bryłowe	77
4.2.8.	Powłokowe ES geometrycznie jednowymiarowe	78
4.2.9.	Geometrycznie jednowymiarowe dwuwęzłowe „stożkowe” ES powłokowe – przejście do ES tarczowych, płytowych i powłokowych walcowych	80
4.3.	Algorytm liniowej analizy statycznej	83
4.4.	Modelowanie konstrukcji powierzchniowych MES – zarys . . .	83

Rozdział 5. Tarcze prostokątne 86

5.1.	Wstęp	86
5.2.	Równania tarcz w układzie współrzędnych kartezjańskich . . .	87
5.2.1.	Sformułowanie lokalne	87
5.2.2.	Równania przemieszczeniowe tarcz	88
5.2.3.	Siły tarczowe główne i ich kierunki	90
5.2.4.	Równanie tarczy wyrażone za pomocą funkcji naprężeń Airy’ego	90
5.2.5.	Sformułowanie globalne dla tarczy	92
5.3.	Tarcza kwadratowa jednokierunkowo rozciągana – przykład liczbowy	92
5.3.1.	Rozwiązanie analityczne problemu sformułowanego lokalnie (dane i wyniki kontrolne)	93
5.3.2.	Rozwiązanie analityczne z użyciem funkcji naprężenia	95
5.3.3.	Wyniki analizy numerycznej MES	95
5.4.	Tarcza kwadratowa w stanie czystego ścinania – przykład liczbowy	96
5.4.1.	Analityczne rozwiązanie problemu sformułowanego lokalnie	96
5.4.2.	Wyniki analizy numerycznej MES	97

5.5.	Wysoki wspornik – przykład liczbowy	97
5.5.1.	Rozwiązanie analityczne	98
5.5.2.	Wyniki analizy numerycznej MES	102
5.6.	Zginanie poprzeczne belki podpartej na końcach – przykład liczbowy	104
5.6.1.	Rozwiązanie analityczne	104
5.6.2.	Wyniki analizy numerycznej MES	108
5.7.	Tarcza kwadratowa (belko-ściana) – przykład liczbowy	110
5.7.1.	Opis problemu	110
5.7.2.	Wyniki analizy numerycznej MES	113
Rozdział 6.	Tarcze kołowe i pierścieniowe	114
6.1.	Równania tarcz w układzie współrzędnych biegunowych – sfor- mułowanie lokalne i globalne	114
6.2.	Równania tarcz w stanie osiowo symetrycznym	117
6.3.	Tarcza pierścieniowa w osiowo symetrycznym stanie – przy- kład liczbowy	119
6.3.1.	Rozwiązanie analityczne	119
6.3.2.	Wyniki numerycznej analizy MES	122
Rozdział 7.	Zginane płyty prostokątne	124
7.1.	Wstęp	124
7.2.	Równania klasycznej teorii płyt cienkich Kirchhoffa-Love’a .	125
7.2.1.	Założenia i podstawowe zależności	125
7.2.2.	Równanie równowagi płyty prostokątnej wyrażone przez momenty	130
7.2.3.	Równanie przemieszczeniowe cienkiej płyty prostokąt- nej zgodne z teorią K-L	130
7.2.4.	Sformułowanie globalne dla płyt cienkich K-L	131
7.3.	Wyprowadzenie przemieszczeniowego równania zginania cien- kiej płyty z zasady minimum całkowitej energii potencjalnej .	131
7.4.	Równanie zginanej płyty spoczywającej na podłożu spręży- stym typu Winklera	132
7.5.	Równania teorii Mindlina-Reissnera umiarkowanie grubych płyt	133
7.5.1.	Opis kinematyki i podstawowe zależności dla płyt M-R	133
7.5.2.	Równania przemieszczeniowe umiarkowanie grubej płyty prostokątnej M-R	134
7.5.3.	Sformułowanie globalne dla płyt umiarkowanie grubych	135

7.6.	Wzorcowe rozwiązanie zginanej płyty prostokątnej z obciążeniem sinusoidalnym – przykład liczbowy	137
7.7.	Analiza płyt zginanych z zastosowaniem podwójnych i pojedynczych szeregów trygonometrycznych	141
7.7.1.	Idea metody Naviera – podwójnych szeregów trygonometrycznych	141
7.7.2.	Zastosowanie metody Levy’ego – pojedynczych szeregów trygonometrycznych	144
7.7.3.	Analiza metodą szeregów trygonometrycznych i MES płyty równomiernie obciążonej (przegubowo podpartej lub utwierdzonej na obwodzie) – przykłady liczbowe	144
7.7.4.	Analiza płyty o zróżnicowanych warunkach brzegowych na obwodzie – przykład liczbowy	149
7.7.5.	Analiza płyty prostokątnej utwierdzonej wzdłuż trzech krawędzi z częścią wspornikowo wysuniętą – przykład liczbowy	154
7.8.	Przybliżone rozwiązanie płyt zginanych metodą różnic skończonych (MRS)	157
7.8.1.	Idea metody różnic skończonych	157
7.8.2.	Zastosowanie MRS do rozwiązania problemu zginania płyt prostokątnych	158
7.8.3.	Płyta przegubowo podparta z równomiernym obciążeniem – przykład liczbowy	161
7.8.4.	Rozwiązanie płyty przegubowo podpartej na obwodzie z równomiernym obciążeniem spoczywającej na jednoparametrycznym podłożu Winklera	163
7.9.	Przybliżone rozwiązanie płyty metodą energetyczną Ritza	165
7.9.1.	Idea metody Ritza	165
7.9.2.	Płyta prostokątna przegubowo podparta na obwodzie – przykład liczbowy	166
7.10.	Analiza cienkich i umiarkowanie grubych płyt wg teorii Kirchhoffa-Love’a (K-L) i Mindlina-Reissnera (M-R) – porównanie	168
7.10.1.	Dane i wyniki obliczeń analitycznych	169
7.10.2.	Wyniki analizy numerycznej MES	170
7.11.	Zginanie płyt ukośnych	171
7.11.1.	Informacje na temat teorii i projektowania	171

7.11.2. Analiza numeryczna MES	172
Rozdział 8. Zginanie cienkich płyt kołowych i pierścieniowych	175
8.1. Ogólny stan (brak osiowej symetrii)	175
8.2. Stan osiowo symetryczny zginanych płyt	177
8.3. Analityczne rozwiązanie płyt z użyciem rozwinięcia w szereg trygonometryczny względem zmiennej obwodowej	179
8.4. Płyty zginane w osiowo symetrycznym stanie – przykłady liczbowe	180
8.4.1. Rozwiązanie analityczne płyty kołowej równomiernie obciążonej	181
8.4.2. Rozwiązanie analityczne płyty kołowej obciążonej centralnie siłą skupioną	184
8.4.3. Rozwiązanie analityczne płyty pierścieniowej	187
8.4.4. Wyniki analizy numerycznej MES płyty pierścieniowej	190
8.5. Płyta kołowa z antysymetrycznym obciążeniem poprzecznym – przykład liczbowy	191
8.5.1. Rozwiązanie analityczne	191
8.5.2. Wyniki analizy MES	193
Rozdział 9. Powłoki w stanie membranowym	194
9.1. Ogólny stan membranowy powłok obrotowych	195
9.2. Osiowo symetryczny stan membranowy	196
9.2.1. Siły membranowe w powłokach opisanych w układzie sferycznym	196
9.2.2. Siły membranowe w powłokach opisanych w układzie walcowym	197
9.3. Powłoka kulista obciążona ciężarem własnym – przykład liczbowy	198
9.4. Powłoka kulista z równomiernym ciśnieniem wewnętrznym – przykład liczbowy	200
9.5. Powłoka kulista podwieszona obciążona parciem hydrostatycznym – przykład liczbowy	201
9.6. Powłoka kulista podparta na pośrednim konturze obciążona parciem hydrostatycznym – przykład liczbowy	203
9.6.1. Wyniki rozwiązania analitycznego	203
9.6.2. Rozwiązanie numeryczne	205
9.7. Powłoka kulista obciążona niesymetrycznie działającym wiatrem	207

9.7.1.	Dane i wyniki rozwiązania analitycznego	209
9.7.2.	Opis numerycznej analizy MES	212
9.8.	Powłoka stożkowa otwarta obciążona ciężarem własnym . . .	213
9.9.	Powłoka walcowa w osiowo symetrycznym stanie membrano- wym pod wpływem działania ciężaru własnego i parcia hydro- statycznego – przykład liczbowy	215
9.9.1.	Równania stanu membranowego dla powłok walcowych	215
9.9.2.	Rozwiązanie analityczne	215
9.10.	Ogólny przypadek obciążenia zamkniętej powłoki walcowej . .	219
9.10.1.	Sformułowanie problemu	219
9.10.2.	Powłoka walcowa pod wpływem działania niesyme- trycznego wiatru	222
9.10.3.	Powłoka walcowa jako pozioma rura oparta na prze- ponach obciążona ciężarem własnym	224
9.11.	Powłoka hiperboloidalna obciążona ciężarem własnym	227
9.11.1.	Dane i wyniki rozwiązania analitycznego	228
9.11.2.	Rozwiązanie przybliżone	229

Rozdział 10. Powłoki w stanie membranowo-giętnym 230

10.1.	Powłoki walcowe w osiowo symetrycznym stanie membranowo-giętnym	230
10.1.1.	Opis geometrii powłoki walcowej	230
10.1.2.	Równania osiowo symetrycznego stanu membranowo- giętnego	231
10.1.3.	Równania osiowo symetrycznego stanu membranowego	231
10.1.4.	Rozwiązanie analityczne osiowo symetrycznego stanu membranowo-giętnego powłoki walcowej	232
10.1.5.	Stan membranowo-giętny w powłoce długiej – przy- kład liczbowy	235
10.1.6.	Stan membranowo-giętny w powłoce krótkiej – przy- kład liczbowy	239
10.2.	Budowa rozwiązania analitycznego problemu osiowo syme- trycznego zginania powłok walcowych z wykorzystaniem su- perpozycji rozwiązań	241
10.2.1.	Idea metodologii rozwiązania	241
10.2.2.	Analiza zamkniętej długiej powłoki walcowej z brze- gowym momentowym obciążeniem M	242

10.2.3.	Analiza zamkniętej powłoki walcowej z poziomym oddziaływaniem H	244
10.2.4.	Rozwiązanie metodą sił długiej powłoki walcowej utwardzonej na dolnym konturze z użyciem superpozycji rozwiązań szczegółowych – przykład liczbowy	245
10.2.5.	Rozwiązanie metodą sił długiej powłoki walcowej przegubowo nieprzesuwnie podpartej na dolnym konturze	247
10.2.6.	Wyniki analizy numerycznej MES długiej powłoki walcowej utwardzonej na dolnym konturze	248
10.3.	Osiowo symetryczny membranowo-giętny stan powłoki kulistej	251
10.3.1.	Opis geometrii powłoki kulistej	251
10.3.2.	Równania powłok kulistych dla stanu osiowo symetrycznego membranowo-giętnego	251
10.4.	Rozwiązanie analityczne dla powłoki kulistej utwardzonej w niepodatnym fundamencie obciążonej ciężarem własnym – przykład liczbowy	255
10.5.	Rozwiązanie analityczne zadań pośrednich – analiza powłoki kulistej obciążonej na dolnym brzegu momentem M lub poziomym obciążeniem H	258
10.6.	Osiowo symetryczny stan membranowo-giętny w powłoce kulistej sztywno lub przegubowo połączonej z niepodatnym fundamentem, obciążonej ciężarem własnym	260
10.6.1.	Opis metodologii rozwiązania analitycznego opartego na superpozycji rozwiązań pośrednich	260
10.6.2.	Szczegółowe rozwiązanie analityczne dla powłoki utwardzonej (A)	261
10.6.3.	Szczegółowe rozwiązanie analityczne dla powłoki podpartej przegubowo nieprzesuwnie (B)	264
10.6.4.	Wyniki numerycznej analizy MES – przypadki A i B	265
10.7.	Stan membranowo-giętny w powłoce kulistej, obciążonej ciężarem własnym, sztywno połączonej z wieńcem podporowym odkształcalnym w płaszczyźnie poziomej	268
10.7.1.	Rozwiązanie analityczne – przykład liczbowy	269
10.8.	Połączenie powłoki kulistej i walcowej w zadaszonym zbiorniku	273
10.8.1.	Rozwiązanie analityczne metodą sił	274
10.8.2.	Opis rozwiązań numerycznych MES	277

10.9. Ogólny przypadek deformacji powłok walcowych	279
10.10. Stan membranowo-giętny otwartej powłoki walcowej opartej na przeponach, wywołany ciężarem własnym	282
10.10.1. Analityczne ujęcie pracy walcowych sklepień na przy- kładzie dachu Scordelisa-Lo	283
10.10.2. Analiza numeryczna MES	284
10.11. Obustronnie utwierdzona jednoprzęsłowa powłoka walcowa (pozioma rura) obciążona ciężarem własnym i parciem wody .	289
10.11.1. Opis efektów membranowych i giętnych w powłoce poddanej działaniu ciężaru własnego – przykład licz- bowy	290
10.11.2. Opis efektów membranowych i giętnych w powłoce poddanej działaniu parcia wody – przykład liczbowy .	299
Rozdział 11. Powłoki mało wyniosłe	303
11.1. Ogólne równania powłok mało wyniosłych	303
11.2. Równania Puchera membranowych powłok mało wyniosłych .	306
11.3. Powłoka w kształcie paraboloidy obrotowej na rzucie prostokątnego trójkąta równoramiennej – przykład liczbowy	307
11.3.1. Opis geometrii powłoki	307
11.3.2. Rozwiązanie analityczne stanu bezmomentowego . . .	308
11.4. Powłoka w kształcie paraboloidy hiperbolicznej na rzucie prostokąta – przykład liczbowy	311
11.4.1. Ogólny opis geometrii powłoki i rozwiązania	311
11.4.2. Rozwiązanie analityczne stanu membranowego	314
11.5. Stan membranowo-giętny w powłoce parasolowatej – przykład liczbowy	319
11.5.1. Rozwiązanie analityczne	320
11.5.2. Rozwiązanie numeryczne MES	320
Rozdział 12. Obciążenia termiczne w ustrojach powierzchniowych	324
12.1. Równomierna zmiana temperatury wzdłuż grubości UP	326
12.1.1. Równomierny wzrost temperatury w tarczy kołowej .	326
12.1.2. Równomierny wzrost temperatury w powłoce walcowej podpartej przegubowo przesuwnie w poziomie na dolnym konturze	327

12.1.3.	Równomierny wzrost temperatury w powłoce kulistej podpartej przegubowo przesuwnie w poziomie na dolnym konturze	327
12.1.4.	Równomierny wzrost temperatury w powłoce walcowej utwierdzonej lub przegubowo nieprzesuwnie podpartej na dolnym konturze	328
12.1.5.	Powłoka półkulista równomiernie ogrzana zamocowana na brzegu	331
12.2.	Liniowa zmiana temperatury wzdłuż grubości UP	335
12.2.1.	Liniowa zmiana przyrostu temperatury w płycie kołowej	336
12.2.2.	Liniowa zmiana temperatury wzdłuż grubości w płycie prostokątnej	340
12.2.3.	Liniowa zmiana temperatury wzdłuż grubości w powłoce walcowej	341
12.2.4.	Liniowa zmiana temperatury wzdłuż grubości w pełnej powłoce kulistej	346

Rozdział 13. Zginanie płyt z dużymi siłami w płaszczyźnie środkowej **347**

13.1.	Równanie równowagi płyty z siłami tarczowymi przy pominięciu zasady zeszytywnienia	347
13.2.	Energia zginania przy dużych siłach tarczowych	349
13.3.	Wyprowadzenie równania Brayana z zasady minimum całkowitej energii potencjalnej	350

Rozdział 14. Płyty o umiarkowanie dużych ugięciach – teoria Karmana **352**

14.1.	Równania przemieszczeniowo-siłowe – ujęcie lokalne	352
14.2.	Całkowita energia potencjalna – sformułowanie globalne . . .	353
14.3.	Rozwiązania przybliżone metodą Ritza – przykłady liczbowe .	355
14.3.1.	Umiarkowanie duże ugięcia membrany kwadratowej .	355
14.3.2.	Umiarkowanie duże ugięcia płyty kwadratowej	357
14.4.	Algorytm geometrycznie nieliniowej analizy MES	359
14.5.	Nieliniowa analiza zginania płyty MES – przykład liczbowy .	361

Rozdział 15. Utrata stateczności przez wyboczenie płyt **364**

15.1.	Statyczne kryterium wyboczenia płyt	364
-------	---	-----

15.2.	Analityczne rozwiązanie problemu wyboczenia jednokierunkowo ściskanej płyty – przykład liczbowy	366
15.3.	Przybliżone rozwiązanie problemu wyboczenia jednokierunkowo ściskanej płyty metodą różnic skończonych (MRS) – przykład liczbowy	369
15.4.	Algorytm rozwiązania i wyniki numerycznej analizy wyboczenia MES	371
15.5.	Analiza numeryczna wyboczenia MES płyt kwadratowych – przykłady liczbowe	373
15.6.	Analiza wyboczenia kołowej płyty ściskanej radialnie	376
15.6.1.	Analityczne rozwiązanie	377
15.6.2.	Numeryczna analiza MES	379
Rozdział 16.	Utrata stateczności powłok – zarys	381
16.1.	Liniowa analiza wyboczenia – opis wybranych problemów . . .	381
16.2.	Wyboczenie powłoki walcowej ściskanej wzdłuż tworzącej . . .	382
16.2.1.	Analityczny i numeryczny opis wyboczenia powłoki osiowo ściskanej – przykład liczbowy	383
16.2.2.	Dalsze informacje o utracie stateczności powłok ściskanych osiowo	386
16.3.	Wyboczenie powłoki walcowej ze ściskającym ciśnieniem normalnym	387
16.3.1.	Rozwiązanie analityczne problemu wyboczenia	388
16.3.2.	Oszacowanie na podstawie rozwiązań analitycznych obciążenia krytycznego dla powłoki ściskanej radialnie przegubowo podpartej na konturach brzegowych . . .	392
16.3.3.	Wyniki analizy numerycznej MES dla powłoki długiej . . .	394
16.3.4.	Wyniki analizy numerycznej MES powłoki krótkiej . . .	397
16.4.	Nieliniowa analiza utraty stateczności – opis problemu	398
16.5.	Utrata stateczności jednokierunkowo ściskanej paneli walcowej i płyty – przykład liczbowy	398
16.6.	Utrata stateczności mało wyniosłych powłok kulistych z ciśnieniem zewnętrznym	402
Rozdział 17.	Drgania własne płyt i powłok	403
17.1.	Wprowadzenie	403
17.2.	Równania różniczkowe swobodnych poprzecznych drgań płyt . . .	405

17.3.	Analityczny i numeryczny opis poprzecznych drgań własnych płyt prostokątnych – przykłady liczbowe	406
17.3.1.	Drgania kwadratowej płyty przegubowo podpartej na obwodzie	406
17.3.2.	Drgania kwadratowej płyty wspornikowej	408
17.4.	Drgania poprzeczne płyty kołowej utwierdzonej na obwodzie .	411
17.5.	Drgania poprzeczne mało wyniosłych powłok	412
17.5.1.	Ścisła i numeryczna analiza drgań poprzecznych paneli walcowej	413
17.5.2.	Drgania mało wyniosłej czaszy kulistej zamocowanej na brzegu	416
17.6.	Drgania walcowych powłok zamkniętych	417
17.6.1.	Opis idei analitycznego rozwiązania przemieszczeniowych równań drgań swobodnych	417
17.6.2.	Analiza numeryczna MES drgań swobodnych powłoki walcowej (długiej i krótkiej) utwierdzonej na dolnym konturze	418
Rozdział 18.	Stany graniczne płyt – zarys	421
18.1.	Wprowadzenie	421
18.2.	Obliczenie nośności granicznej płyty prostokątnej równomiernie obciążonej przegubowo podpartej na obwodzie – przykład liczbowy	422
Literatura		427
Skorowidz		431