

SPIS RZECZY

Przedmowa	5
Rozdział I. Wektory	
§ 1. Pojęcia podstawowe	7
1. Określenie	7
2. Dodawanie wektorów	9
3. Mnożenie wektora przez liczbę	12
§ 2. Kąty i rzuty	13
1. Oś	13
2. Kąty nieorientowane	13
3. Kąty zorientowane	14
4. Miara wektora na osi	16
5. Rzut na prostą w przestrzeni	16
6. Rzut na prostą na płaszczyźnie	18
7. Rzut na płaszczyznę	18
§ 3. Iloczyn skalarny	20
Rozdział II. Składowe wektora i współrzędne punktu	
§ 4. Składowe wektora i współrzędne punktu na prostej	24
1. Składowe wektora	24
2. Współrzędne punktu	25
§ 5. Składowe wektora i współrzędne punktu na płaszczyźnie	26
1. Zależności między wektorami równoległymi do płaszczyzny	26
2. Składowe wektora na płaszczyźnie	28
3. Współrzędne punktu	29
§ 6. Składowe wektora i współrzędne punktu w przestrzeni	30
1. Zależności między wektorami w przestrzeni	30
2. Składowe wektora w przestrzeni	31
3. Współrzędne punktu w przestrzeni	33
4. Przestrzenie wektorowe	34
§ 7. Iloczyn skalarny i długość wektora	34
1. Iloczyn skalarny i długość wektora na płaszczyźnie	34
2. Iloczyn skalarny i długość wektora w przestrzeni	36
§ 8. Kąty między wektorami w prostokątnych układach współrzędnych	38
1. Cosinusy kierunkowe na płaszczyźnie	38
2. Cosinusy kierunkowe w przestrzeni	38
3. Kąty między wektorami	39
§ 9. Orientacja układu wektorów	41
1. Orientacja pary wektorów na płaszczyźnie	41
2. Orientacja trójki wektorów w przestrzeni	45
§ 10. Iloczyn wektorialny, objętość czworościanu i pole trójkąta	47

1. Iloczyn wektorialny	47
2. Najprostsze własności	48
3. Składowe iloczynu wektorialnego	50
4. Iloczyn mieszany wektorów i objętość czworoscianu	51
5. Pole trójkąta	52
§ 11. Równoległość	54
1. Kierunki	54
2. Kierunki na płaszczyźnie	56
§ 12. Inne układy współrzędnych	58
1. Współrzędne biegunowe na płaszczyźnie	58
2. Współrzędne cylindryczne w przestrzeni	60
3. Współrzędne sferyczne w przestrzeni	60

Rozdział III. Prosta na płaszczyźnie

§ 13. Równania prostej na płaszczyźnie	63
1. Wstęp	63
2. Równanie prostej na płaszczyźnie	65
3. Równanie ogólne prostej	66
4. Równanie kierunkowe	67
5. Równanie odcinkowe	68
§ 14. Kąt między dwiema prostymi	68
§ 15. Przykłady	70
§ 16. Postać normalna równania prostej	71
§ 17. Pęk prostych na płaszczyźnie	74

Rozdział IV. Płaszczyzna i prosta w przestrzeni

§ 18. Płaszczyzna w przestrzeni	78
1. Płaszczyzna w dowolnym układzie ukośnokątnym	78
2. Równanie normalne płaszczyzny	81
3. Pęki płaszczyzn	82
4. Płaszczyzna przez trzy punkty	82
§ 19. Prosta w przestrzeni	83
1. Prosta jako krawędź przecięcia dwóch płaszczyzn	83
2. Przedstawienie prostej przez jej rzuty	84
3. Przedstawienie parametryczne prostej	84
4. Przykłady	85

Rozdział V. Zmiany układu współrzędnych, izometrie, podobieństwa i przekształcenia afiniczne

§ 20. Zmiana układu współrzędnych prostokątnych	88
§ 21. Przekształcenia zbiorów	91
§ 22. Izometrie	95
1. Izometrie na płaszczyźnie	95
2. Izometrie w przestrzeni	99
§ 23. Zmiana układu współrzędnych ukośnokątnych	101
1. Zmiana układu współrzędnych na prostej	101
2. Zmiana układu współrzędnych w przestrzeni i na płaszczyźnie	101
§ 24. Przekształcenia afiniczne	104
1. Przekształcenia afiniczne prostej	104
2. Przekształcenia afiniczne płaszczyzny	106
3. Podobieństwa	110
4. Przekształcenia afiniczne przestrzeni	111
§ 25. O klasyfikacji pojęć i twierdzeń geometrii	112

Rozdział VI. Przestrzeń rzutowa rzeczywista i zespolona oraz współrzędne jednorodne

§ 26. Elementy w nieskończoności	115
§ 27. Współrzędne jednorodne	118
§ 28. Prosta rzutowa na płaszczyźnie właściwej	120
§ 29. Płaszczyzna i prosta rzutowa w przestrzeni	123
§ 30. Zmiana układu współrzędnych jednorodnych. Przekształcenia afiniczne przestrzeni rzutowej	126
1. Zmiana układu współrzędnych	126
2. Przekształcenia afiniczne	127
§ 31. Stosunek podziału pojedynczego	129
§ 32. Przestrzeń właściwa zespolona i przestrzeń rzutowa zespolona	131
1. Prosta zespolona	131
2. Punkty zespolone na płaszczyźnie i w przestrzeni	134
§ 33. Twory zespolone stopnia pierwszego	134
1. Twory stopnia pierwszego na płaszczyźnie rzutowej zespolonej	134
2. Pewne przedstawienie parametryczne prostej	136
3. Płaszczyzna i prosta w przestrzeni rzutowej zespolonej	138
§ 34. Twory algebraiczne	140
1. Twory algebraiczne na prostej	140
2. Twory algebraiczne na płaszczyźnie	142
3. Twory algebraiczne w przestrzeni	146
§ 35. Przykłady płaskich tworów algebraicznych	147
1. Okrąg	147
2. Elipsa	148
3. Przykład kubiki	149
4. Przykłady kwadryk	149
5. Cykloidy	151

Rozdział VII. Okrąg i sfera

§ 36. Równanie okręgu	153
§ 37. Wzajemne położenie prostej i okręgu na płaszczyźnie	155
1. Prosta i okrąg	155
2. Punkty przecięcia dwóch okręgów. Prosta potęgowa	155
3. Kąt dwóch okręgów	158
§ 38. Pęki okręgów	159
§ 39. Inwersja	162
1. Podstawowe własności inwersji	162
2. Wiernokątność inwersji	164
3. Inwersor	164
§ 40. Rzut stereograficzny	165
§ 41. Punkty cykliczne i okrąg sferyczny	168
1. Punkty cykliczne	168
2. Okrąg sferyczny	170

Rozdział VIII. Krzywe drugiego stopnia i ich klasyfikacja

§ 42. Geometryczne określenie stożkowych właściwych	172
1. Najprostsze własności ogniskowe	172
2. Równanie biegunowe stożkowych właściwych	175
3. Stożkowe jako przekroje stożka obrotowego	176
§ 43. Niezmienniki równań stożkowych	177
§ 44. Metryczna klasyfikacja stożkowych	180

§ 45. Afiniczna klasyfikacja stożkowych	184
1. Afiniczna klasyfikacja stożkowych	184
2. Najogólniejsza definicja stożkowych	187

Rozdział IX. Afiniczne własności stożkowych

§ 46. Styczna i biegunowa	189
1. Oznaczenia	189
2. Stożkowa a prosta	189
3. Styczna w punkcie właściwym	191
4. Styczna w płaszczyźnie rzutowej	192
5. Biegunowa i biegun	192
6. Asymptoty	195
§ 47. Środek i średnice	196
1. Środek	196
2. Średnice	198
3. Równanie pary asymptot	201
4. Środki symetrii stożkowych niewłaściwych	201

Rozdział X. Własności metryczne stożkowych

§ 48. Osie	203
§ 49. Własności metryczne elipsy rzeczywistej	205
1. Ogniska i kierownice	205
2. Twierdzenie Apoloniusza	207
3. Konstrukcje	208
4. Biegunowe	210
5. Normalna	210
6. Wnętrze i zewnątrz	211
7. Pewna własność przekształceń afinicznych	211
§ 50. Własności metryczne hiperboli	212
1. Ogniska i kierownice	212
2. Hiperbola w układzie asymptot	213
3. Hiperbola w układzie średnic sprzężonych	214
4. Wnętrze i zewnątrz	216
5. Kąt między asymptotami hiperboli	216
§ 51. Własności metryczne paraboli	217
§ 52. Niezmienniki metryczne w układzie ukośnokątnym	219

Rozdział XI. Przykłady powierzchni i klasyfikacja kwadryk

§ 53. Powierzchnie walcowe, stożkowe i obrotowe	223
1. Powierzchnie walcowe	223
2. Powierzchnie stożkowe	226
3. Powierzchnie obrotowe	227
4. Powierzchnia śrubowa	229
§ 54. Dalsze przykłady kwadryk	230
1. Elipsoida	230
2. Hiperboloida jednopowłokowa	232
3. Hiperboloida dwupowłokowa	234
4. Paraboloidy	235
§ 55. Klasyfikacja kwadryk	238
1. Niezmienniki metryczne i afiniczne równań kwadryk	238
2. Metryczna klasyfikacja kwadryk	239
3. Afiniczna klasyfikacja stożkowych	244

Rozdział XII. Własności afiniczne kwadryk

§ 56. Płaszczyzna biegunowa	246
1. Oznaczenia	246
2. Płaszczyzna biegunowa	247
3. Proste biegunowo sprzężone względem kwadryki	250
4. Środek kwadryki	252
§ 57. Proste i płaszczyzny styczne	255
1. Płaszczyzna styczna	255
2. Przekrój kwadryki płaszczyzną styczną	257
3. Stożek stycznych	258
4. Stożek asymptotyczny	259
5. Płaszczyzny asymptotyczne	260
§ 58. Prostokreślność kwadryk	261
§ 59. Płaszczyzny średnicowe i średnice	265
1. Płaszczyzny średnicowe	265
2. Średnice	267
3. Równania kwadryk w specjalnych układach współrzędnych	269

Rozdział XIII. Własności metryczne kwadryk

§ 60. Osie	271
1. Osie	271
2. Kwadryki obrotowe	273
3. Przekroje kołowe	275
§ 61. Uogólnienia twierdzeń Apoloniusza	278
1. Niezmienniki I_1, I_2, I_3, I_4	278
2. Uogólnienia twierdzeń Apoloniusza	279

Rozdział XIV. Podstawowe pojęcia geometrii rzutowej

§ 62. Przekształcenia rzutowe przestrzeni	281
§ 63. Współrzędne rzutowe w przestrzeni	283
§ 64. Współrzędne i przekształcenia rzutowe na płaszczyźnie i na prostej	287
1. Współrzędne i przekształcenia rzutowe na płaszczyźnie	287
2. Współrzędne i przekształcenia rzutowe na prostej	291
3. Przedstawienie parametryczne prostej	292
§ 65. Stosunek anharmoniczny	294
1. Własności podstawowe	294
2. Twierdzenie Pappusa	298
§ 66. Stosunek harmoniczny	302
§ 67. Inwolucje rzutowe na prostej	303

Rozdział XV. Współrzędne plückerowskie i dualizm

§ 68. Współrzędne plückerowskie prostych na płaszczyźnie	309
1. Współrzędne prostej i równania punktu	309
2. Współrzędne rzutowe prostej w pęku	310
§ 69. Korelacje	314
1. Przekształcenia rzutowe we współrzędnych plückerowskich	314
2. Korelacje płaszczyzn	316
§ 70. Zasada dwoistości na płaszczyźnie	317
§ 71. Współrzędne plückerowskie płaszczyzn	320
1. Twory jednowymiarowe	320
2. Korelacje i przestrzenna zasada dwoistości	321

§ 72. Twierdzenie Desargues'a o trójkątach	323
§ 73. Czworobok zupełny i czworokąt zupełny	327
§ 74. Twierdzenie Laguerre'a	330

Rozdział XVI. Krzywe drugiego stopnia i drugiej klasy na płaszczyźnie

§ 75. Klasyfikacja rzutowa krzywych drugiego stopnia i drugiej klasy	333
§ 76. Stożkowe właściwe rzutowe	335
1. Styczne i punkty styczności	335
2. Dwoistość stożkowych właściwych	336
§ 77. Biegunowa i biegun	341
1. Własności rzutowe biegunowej	341
2. Trójkąt samobiegunowy	344
§ 78. Przedstawienie parametryczne i pęk stożkowych	345
1. Przedstawienie parametryczne	345
2. Pęk stożkowych	347
§ 79. Twierdzenia i konstrukcje Steiner'a	350
1. Twierdzenia Steiner'a	350
2. Konstrukcje Steiner'a	353
§ 80. Twierdzenia Pascala i Brianchona	354

Rozdział XVII. Powierzchnie drugiego stopnia i drugiej klasy

§ 81. Klasyfikacja rzutowa powierzchni drugiego stopnia i drugiej klasy	359
§ 82. Powierzchnie drugiego stopnia i drugiej klasy	361
1. Elementy styczne	361
2. Płaszczyzna biegunowa i biegun, czworosięca samobiegunowy	364
§ 83. Tworzenie kwadryk przez pęki płaszczyzn	365

Rozdział XVIII. Przestrzenie wielowymiarowe

§ 84. Pojęcia podstawowe	368
1. Wstęp	368
2. Określenie n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej	368
3. Wektory	370
4. Iloczyn skalarny	371
§ 85. Podprzestrzenie liniowe	375
1. Określenie przestrzeni liniowych	375
2. Prosta	379
3. m -planarność	380
4. Hiperpłaszczyzna	381
5. Podprzestrzenie uzupełniające się prostopadle i odległość punktu od podprzestrzeni	383
6. Równoległość podprzestrzeni liniowych	386
7. Skośność i przekrój podprzestrzeni	388
§ 86. Zmiana układów współrzędnych. Izometrie i przekształcenia afiniczne	390
1. Układy ortonormalne współrzędnych	390
2. Dowlone układy ukośnokątne współrzędnych	392
3. d -podprzestrzeń w dowolnych układach ukośnokątnych	393
4. Izometrie	395
5. Przekształcenia afiniczne	398

6. Program erlangenński	399
§ 87. Równoległościان i sympleks	399
1. Równoległościان	399
2. Miara równoległościان	401
3. Sympleks	404
§ 88. Przestrzeń rzutowe rzeczywiste i zespolone	409
1. Współrzędne jednorodne i punkty w ∞	409
2. Podprzestrzeń liniowe przestrzeni R^n	411
3. Przestrzeń zespolona właściwa i rzutowa	414
§ 89. Niektóre pojęcia geometrii rzutowej	415
1. Współrzędne rzutowe	415
2. Przekształcenia rzutowe	418
3. Stosunek anharmoniczny	420
4. Korelacje i zasada dwoistości	421
§ 90. Kwadryki	422
1. Hiperpowierzchnie algebraiczne	422
2. Sfera i kula n -wymiarowa	423
3. Niezmienniki metryczne i afiniczne równań kwadryk	426
4. Szczególne przypadki metrycznej i afinicznej klasyfikacji kwadryk	427
5. Rzutowa klasyfikacja kwadryk	430
6. Biegun i hiperpłaszczyzna biegunowa	431
7. Kwadryka i prosta. Hiperpłaszczyzny styczne	433
8. Przekrój kwadryki rzędu $n+1$ i hiperpłaszczyzny stycznej	435
9. Tworzące kwadryk rzędu $n+1$	437
10. Średnice i osie	438

Przypis. Niektóre wiadomości z algebry liniowej

1. Określenie i własności wyznaczników	441
2. Równania liniowe	443
3. Przestrzeń wektorowa	445
4. Przekształcenia liniowe	447
5. Formy kwadratowe	449
6. Przekształcenie ortogonalne	452

Skorowidz	455
---------------------	-----