

Spis rzeczy

Słowo wstępne	7
Rozdział 1. Wybrane zagadnienia z rachunku wektorowego	9
1.1. Przestrzeń euklidesowa – wektor położenia	9
1.2. Pola skalarne, wektorowe i tensorowe	11
1.3. Tensory rzędu drugiego	12
1.3.1. Reprezentacja tensora rzędu drugiego w prostokątnym układzie kartezjańskim	13
1.3.2. Przykłady tensorów rzędu drugiego	14
1.4. Liniowa przestrzeń wektorowa	16
1.5. Operacje różniczkowe na polach skalarnych i wektorowych	17
1.5.1. Gradient funkcji	18
1.5.2. Operator dywergencji	20
1.5.3. Operator rotacji	25
1.5.4. Wirowość pola prędkości bryły sztywnej i przepływu w pobliżu ściany	28
1.5.5. Cyrkulacja pola prędkości i twierdzenie Stokesa	31
1.5.6. Laplasian	39
1.5.7. Laplasian w sferycznym i cylindrycznym układzie współrzędnych	40
1.6. Równanie Laplace’a	41
1.6.1. Zagadnienie Dirichleta i zagadnienie Neumanna	43
1.6.2. Wzory całkowe Greena	45
1.6.3. Własności funkcji harmonicznych	47
Rozdział 2. Kinematyka ośrodka ciągłego	51
2.1. Uwagi o hipotezie ośrodka ciągłego	51
2.2. Ruch w ośrodku ciągłym	52
2.2.1. Opis ruchu w zmiennych Lagrange’a i w zmiennych Eulera	53
2.2.2. Trajektoria cząstki, linie prądu i linie wysnute	55
2.2.3. Pochodna lokalna, konwekcyjna i substancjalna	64
2.2.4. Pochodna jakobianu	66
2.3. Twierdzenie transportowe	70
2.4. Kinematyka deformacji ośrodka ciągłego	73
2.4.1. Własności tensora symetrycznego D	74

2.4.2.	Własności tensora antysymetrycznego	78
2.5.	Zadania kontrolne	80
Rozdział 3. Zasada zachowania masy i pędu dla ośrodka ciągłego		83
3.1.	Zasada zachowania masy	83
3.1.1.	Równanie ciągłości w zmiennych Lagrange'a	85
3.1.2.	Przepływ nieściśliwy	85
3.1.3.	Równanie Burgersa	90
3.2.	Zasada zachowania pędu	93
3.2.1.	Zasada zachowania pędu dla układu n punktów materialnych . . .	95
3.2.2.	Prawo zachowania pędu dla ośrodka ciągłego	96
3.2.3.	Zasada lokalnej równowagi naprężeń	98
3.2.4.	Równania ruchu ośrodka ciągłego	103
3.3.	Prawo zachowania momentu pędu	104
3.3.1.	Zasada zachowania momentu pędu dla układu n punktów materialnych	104
3.3.2.	Prawo zachowania momentu pędu dla ośrodka ciągłego	105
3.3.3.	Równanie transportu pędu	107
3.3.4.	Równanie transportu energii kinetycznej	114
Rozdział 4. Równania ruchu cieczy nielepkiej		117
4.1.	Równanie Eulera dla cieczy nielepkiej	117
4.1.1.	Równanie Gromkei–Lamba	119
4.1.2.	Równanie Helmholtza (równanie transportu wirowości w płynie nielepkim)	120
4.1.3.	Dekompozycja Hodge'a	121
4.1.4.	Wyznaczanie pola ciśnień metodą projekcji	123
4.2.	Przepływy potencjalne	125
4.2.1.	Energia kinetyczna przepływu potencjalnego i twierdzenie Thomsona	126
4.2.2.	Równanie Bernoulliego	128
4.2.3.	Twierdzenie o cyrkulacji pola prędkości (twierdzenie Kelvina) . . .	131
4.3.	Twierdzenie o rozkładzie pola wektorowego (twierdzenie Helmholtza) . . .	133
4.4.	Przykłady trójwymiarowych przepływów potencjalnych	136
4.4.1.	Źródło punktowe	136
4.4.2.	Dipol	140
4.4.3.	Opływ kuli strumieniem jednorodnym	142
4.4.4.	Zagadnienie potencjalnego opływu kuli poruszającej się ze stałą prędkością	150
4.5.	Delta Diraca	151
Rozdział 5. Wybrane zagadnienia z analizy zespolonej		155
5.1.	Liczby zespolone	155
5.2.	Funkcje zmiennej zespolonej	157
5.2.1.	Ciągłość funkcji zespolonej	158
5.2.2.	Pochodna zespolona	158

5.2.3.	Warunki Cauchy'ego–Riemanna we współrzędnych cylindrycznych	161
5.2.4.	Funkcje zespolone a funkcje harmoniczne	162
5.2.5.	Całkowanie funkcji zespolonej	165
5.2.6.	Twierdzenie Cauchy'ego	167
5.2.7.	Konsekwencje twierdzenia Cauchy'ego	168
5.2.8.	Punkty osobliwe i residua	169
5.2.9.	Twierdzenie Cauchy'ego o residuach	170

Rozdział 6. Dwuwymiarowe przepływy potencjalne 173

6.1.	Funkcja prądu, potencjał prędkości i potencjał zespolony	173
6.2.	Przepływ jednorodny	177
6.3.	Optyw kąta prostego	177
6.4.	Przepływ wywołany źródłem	179
6.5.	Złożenie źródła i przepływu jednorodnego	180
6.6.	Dipol	182
6.7.	Wir punktowy	184
6.8.	Pole prędkości dwóch wirów	188
6.9.	Układ n wirów na płaszczyźnie	193
6.9.1.	Uwagi o hamiltonowskich układach dynamicznych	195
6.9.2.	Nawiasy Poissona	196
6.10.	Ruch trzech wirów	198
6.11.	Kolaps trzech wirów	199
6.12.	Ewolucja wirowości zadana układem wirów punktowych	207
6.13.	Twierdzenie Blasiusa	209
6.14.	Twierdzenie Kutty–Żukowskiego	211
6.15.	Twierdzenie o kole	213
6.16.	Optyw walca	214
6.17.	Optyw walca z cyrkulacją	216
6.18.	Optyw walca w obecności wiru punktowego	218
6.19.	Optyw walca w obecności stacjonarnej pary wirów	222

Rozdział 7. Ruch płynu lepkiego 225

7.1.	Wprowadzenie	225
7.2.	Płyn Stokesa	227
7.3.	Równanie Naviera–Stokesa	230
7.3.1.	Laminarny przepływ w rurze	233
7.3.2.	Przepływ wewnątrz obracających się cylindrów	238
7.3.3.	Doświadczenie Reynoldsa i podobieństwo przepływów	241

Rozdział 8. Ruch wirowy płynu 247

8.1.	Wirowość w płynie nielepkiem	247
8.1.1.	Linia wirowa i rurka wirowa	248
8.1.2.	Wzór Biota–Savarta	250
8.1.3.	Twierdzenia o transporcie wirowości w płynie nielepkiem i nieściśliwym	253

8.1.4.	Twierdzenia Helmholtza	254
8.2.	Uogólnione równanie transportu wirowości Helmholtza dla płynu lepkiego	258
8.2.1.	Równania Helmholtza dla przepływu dwuwymiarowego	260
8.2.2.	Wirowość w dwuwymiarowym przepływie ze ścianami stałymi . . .	261
Literatura		265