

## SPIS TREŚCI

|                                             |    |
|---------------------------------------------|----|
| Przedmowa do wydania francuskiego . . . . . | 13 |
|---------------------------------------------|----|

### *Część pierwsza*

### **Aproksymacja i jej zastosowania**

|                                                                                                                                                     |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>I. Aproksymacja funkcji . . . . .</b>                                                                                                            | <b>17</b> |
| 1. Interpolacja . . . . .                                                                                                                           | 20        |
| 1.1. Pojęcie uogólnionego wielomianu interpolacyjnego . . . . .                                                                                     | 20        |
| 1.2. Interpolacja wielomianowa. . . . .                                                                                                             | 22        |
| 1.2.1. Obliczanie błędu interpolacji — 1.2.2. Wybór węzłów interpolacji — 1.2.3. Poszerzony wzór na błąd interpolacji                               |           |
| 1.3. Wielomiany Czebyszewa. . . . .                                                                                                                 | 30        |
| 1.3.1. Wzory obliczeniowe — 1.3.2. Inne postacie błędu interpolacji                                                                                 |           |
| 1.4. Interpolacja trygonometryczna. Funkcje okresowe . . . . .                                                                                      | 35        |
| 2. Najlepsza aproksymacja . . . . .                                                                                                                 | 37        |
| 2.1. Aproksymacja jednostajna. . . . .                                                                                                              | 38        |
| 2.2. Aproksymacja średniokwadratowa. Aproksymacja w sensie najmniejszych kwadratów . . . . .                                                        | 40        |
| 2.2.1. Obliczanie najlepszej aproksymacji — 2.2.2. Metoda kolokacji Pseudorozwiązanie układu nadokreślonego                                         |           |
| 2.3. Wielomiany ortogonalne. . . . .                                                                                                                | 46        |
| 2.3.1. Konstrukcja ciągu wielomianów ortogonalnych — 2.3.2. Własności wielomianów ortogonalnych — 2.3.3. Ważniejsze ciągi wielomianów ortogonalnych |           |
| 2.4. Porównanie interpolacji i najlepszej aproksymacji. . . . .                                                                                     | 53        |
| 2.5. Aproksymacja przy użyciu sum częściowych szeregów nieskończonych                                                                               | 54        |

|                                                                                                                                                                                |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3. Funkcje dwóch zmiennych . . . . .                                                                                                                                           | 56        |
| 3.1. Wzory ogólne . . . . .                                                                                                                                                    | 56        |
| 3.2. Wybór bazy. Pojęcie sylwetki . . . . .                                                                                                                                    | 58        |
| 3.3. Zastosowanie bazy Czebyszewa . . . . .                                                                                                                                    | 59        |
| 3.4. Szczególne przypadki otrzymywania dokładnych rozwiązań . . . . .                                                                                                          | 60        |
| 3.4.1. Iloczyn tensorowy dwóch macierzy. Przypomnienie definicji i własności — 3.4.2. Zastosowanie do pewnych zagadnień aproksymacji funkcji dwóch zmiennych. Siatki regularne |           |
| <b>II. Numeryczne obliczanie całki oznaczonej . . . . .</b>                                                                                                                    | <b>67</b> |
| 1. Metoda ogólna . . . . .                                                                                                                                                     | 67        |
| 2. Funkcje regularne. Obliczanie $\int_b^a f(x) dx$ . . . . .                                                                                                                  | 68        |
| 2.1. Funkcja określona analitycznie. . . . .                                                                                                                                   | 68        |
| 2.1.1. Metoda interpolacji Czebyszewa — 2.1.2. Funkcja okresowa —                                                                                                              |           |
| 2.1.3. Formuły najwyższej dokładności (metoda Gaussa) —                                                                                                                        |           |
| 2.1.4. Węzły równoodległe. Formuły Cotesa. Całkowanie odcinkami                                                                                                                |           |
| 2.2. Całkowanie funkcji $f(x)$ określonej doświadczalnie . . . . .                                                                                                             | 77        |
| 3. Funkcje osobliwe. Obliczanie $\int_a^b k(x) f(x) dx$ . . . . .                                                                                                              | 79        |
| 3.1. Metoda ogólna . . . . .                                                                                                                                                   | 79        |
| 3.2. Przykłady . . . . .                                                                                                                                                       | 80        |
| 3.2.1. Obliczanie $I = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1+x} f(x) dx$ — 3.2.2. Obliczanie                                                                                                  |           |
| $\int_0^\pi \frac{f(\varphi)}{\cos \theta - \cos \varphi} d\varphi$                                                                                                            |           |
| 3.3. Inna metoda. Przykład . . . . .                                                                                                                                           | 84        |
| 3.4. Uogólnienie metody Gaussa . . . . .                                                                                                                                       | 86        |
| 4. Całki podwójne . . . . .                                                                                                                                                    | 87        |
| 4.1. Funkcje regularne . . . . .                                                                                                                                               | 87        |
| 4.2. Funkcje osobliwe . . . . .                                                                                                                                                | 90        |
| 5. Wnioski . . . . .                                                                                                                                                           | 93        |
| 5.1. Oszacowanie błędu . . . . .                                                                                                                                               | 93        |

*Część druga***Równania i układy równań**

|                                              |           |
|----------------------------------------------|-----------|
| <b>III. Rozwiązywanie równania . . . . .</b> | <b>97</b> |
| 1. Równanie dowolne . . . . .                | 97        |
| 1.1. Metoda kolejnych przybliżeń . . . . .   | 97        |

|                                                                                                                                                                                                                              |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 1.1.1. Warunek dostateczny zbieżności — 1.1.2. Błąd metody — 1.1.3. Wpływ błędów zaokrąglenia — 1.1.4. Interpretacja geometryczna                                                                                            |            |
| 1.2. Poprawianie zbieżności. Nadrelaksacja . . . . .                                                                                                                                                                         | 105        |
| 1.2.1. Metoda — 1.2.2. Przykład                                                                                                                                                                                              |            |
| 1.3. Metoda linearyzacji czyli metoda Newtona (metoda stycznych). . . .                                                                                                                                                      | 106        |
| 1.3.1. Związek z metodami iteracyjnymi — 1.3.2. Uwagi                                                                                                                                                                        |            |
| 1.4. Metoda bisekcji . . . . .                                                                                                                                                                                               | 109        |
| 2. Zera wielomianów. Metoda Bairstowa . . . . .                                                                                                                                                                              | 109        |
| 2.1. Metoda Newtona . . . . .                                                                                                                                                                                                | 110        |
| 2.2. Metoda Bairstowa . . . . .                                                                                                                                                                                              | 111        |
| 2.3. Pierwiastki wielokrotne . . . . .                                                                                                                                                                                       | 116        |
| <b>IV. Układy równań liniowych . . . . .</b>                                                                                                                                                                                 | <b>117</b> |
| 1. Metoda eliminacji . . . . .                                                                                                                                                                                               | 117        |
| 1.1. Macierzowy zapis układu liniowego . . . . .                                                                                                                                                                             | 117        |
| 1.2. Przekształcanie tablic. Rozwiązanie układu . . . . .                                                                                                                                                                    | 117        |
| 1.3. Metoda obliczeń . . . . .                                                                                                                                                                                               | 120        |
| 1.4. Obliczanie wyznacznika . . . . .                                                                                                                                                                                        | 122        |
| 1.5. Zadania „wielokrotne”. Obliczanie macierzy odwrotnej. . . . .                                                                                                                                                           | 124        |
| 2. Układy o macierzy symetrycznej . . . . .                                                                                                                                                                                  | 126        |
| 2.1. Metoda eliminacji . . . . .                                                                                                                                                                                             | 126        |
| 2.2. Macierz symetryczna dodatnio określona. Metoda Choleskiego . . .                                                                                                                                                        | 126        |
| 3. Metoda iteracyjna. Metoda Richardsona . . . . .                                                                                                                                                                           | 128        |
| 3.1. Rozwiązanie układu $\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}$ metodą kolejnych przybliżeń . .                                                                                                                     | 128        |
| 3.2. Metody nadrelaksacji . . . . .                                                                                                                                                                                          | 130        |
| 3.2.1. Równoważność układów (IV.12) i (IV.13) — 3.2.2. Zbieżność układu (IV.13)                                                                                                                                              |            |
| 3.3. Różne metody obliczeniowe . . . . .                                                                                                                                                                                     | 134        |
| 3.3.1. Obliczenia $\mathbf{P}(\mathbf{B})\mathbf{X}$ — 3.3.2. Wybór $r$ i $s$ . Optymalizacja procesu                                                                                                                        |            |
| 4. Pseudorozwiązanie układu nadokreślonego . . . . .                                                                                                                                                                         | 147        |
| 4.1. Definicja pseudorozwiązania . . . . .                                                                                                                                                                                   | 147        |
| 4.2. Równoważność dwóch układów nadokreślonych . . . . .                                                                                                                                                                     | 149        |
| 4.3. Metoda bezpośrednia (metoda sprowadzania do postaci trójkątnej). .                                                                                                                                                      | 149        |
| 4.3.1. Opis metody — 4.3.2. Określanie macierzy $\mathbf{Q}$ — 4.3.3. Przekształcanie pierwszej kolumny macierzy $\mathbf{A}$ — 4.3.4. Przekształcanie $k$ -tej kolumny macierzy $\mathbf{A}_k$ — 4.3.5. Metoda obliczeniowa |            |
| <b>V. Rozwiązanie układu równań nieliniowych . . . . .</b>                                                                                                                                                                   | <b>155</b> |
| 1. Metody kolejnych przybliżeń. . . . .                                                                                                                                                                                      | 155        |
| 2. Metoda linearyzacji (metoda Newtona) . . . . .                                                                                                                                                                            | 157        |

|                                                                                                                                        |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.1. Opis metody . . . . .                                                                                                             | 157        |
| 2.2. Metoda Newtona traktowana jako metoda nadrelaksacji . . . . .                                                                     | 159        |
| 3. Wnioski . . . . .                                                                                                                   | 160        |
| <b>VI. Obliczanie wartości własnych i wektorów własnych macierzy . . . . .</b>                                                         | <b>161</b> |
| 1. Rozwiązywanie równania $\det(A - \lambda I) = 0$ . . . . .                                                                          | 161        |
| 2. Metody przekształceń ortogonalnych . . . . .                                                                                        | 162        |
| 2.1. Metoda Jacobiego . . . . .                                                                                                        | 162        |
| 2.2. Metoda Givensa . . . . .                                                                                                          | 165        |
| 2.2.1. Przekształcanie macierzy — 2.2.2. Znajdowanie wartości własnych macierzy $V$ — 2.2.3. Obliczanie wektorów własnych macierzy $V$ |            |
| 2.3. Macierze niesymetryczne. Metoda Householdera . . . . .                                                                            | 170        |
| 3. Metody iteracyjne . . . . .                                                                                                         | 175        |
| 3.1. Obliczanie wartości własnej o największym module . . . . .                                                                        | 175        |
| 3.1.1. Własności wektorów iterowanych — 3.1.2. Metoda obliczania największej co do modułu wartości własnej                             |            |
| 3.2. Obliczanie następnych wartości własnych metodą redukcji . . . . .                                                                 | 178        |
| 3.2.1. Macierz symetryczna — 3.2.2. Macierz dowolna                                                                                    |            |
| 3.3. Przypadek, w którym największa co do modułu wartość własna jest zespolona . . . . .                                               | 182        |
| 3.4. Ograniczenia metod iteracyjnych . . . . .                                                                                         | 186        |
| 3.5. Obliczanie najmniejszej wartości własnej . . . . .                                                                                | 187        |
| 3.5.1. Macierz odwrotna — 3.5.2. Metody translacji                                                                                     |            |

### *Część trzecia*

## **Układy równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych**

|                                                                                             |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>VII. Równania różniczkowe zwyczajne. Zagadnienia początkowe . . . . .</b>                | <b>189</b> |
| 1. Równanie pierwszego rzędu . . . . .                                                      | 189        |
| 1.1. Metody jednokrokowe; wzory Rungego-Kutty . . . . .                                     | 189        |
| 1.1.1. Geometryczne podstawy metody jednokrokowej — 1.1.2. Wzory Rungego-Kutty              |            |
| 1.2. Metody wielokrokowe . . . . .                                                          | 196        |
| 1.2.1. Metody ekstrapolacyjne — 1.2.2. Metody interpolacyjne — 1.2.3. Metoda obliczeniowa   |            |
| 1.3. Porównanie metod . . . . .                                                             | 203        |
| 2. Zbieżność i stabilność . . . . .                                                         | 204        |
| 2.1. Równania różnicowe liniowe o stałych współczynnikach . . . . .                         | 204        |
| 2.2. Znaczenie pojęcia stabilności . . . . .                                                | 206        |
| 2.3. Aproksymacja równania różniczkowego równaniem różnicowym. Obszar stabilności . . . . . | 208        |

|                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.3.1. Równanie pierwszego rzędu — 2.3.2. Badanie stabilności —              |     |
| 2.3.3. Poprawianie stabilności                                               |     |
| 3. Równania rzędu wyższego niż jeden i układy równań . . . . .               | 213 |
| 3.1. Sprowadzanie równania do układu równań . . . . .                        | 213 |
| 3.2. Uogólnienie poznanych metod na przypadek układu $n$ równań . . . .      | 214 |
| 3.3. Układy równań różniczkowych uwikłanych . . . . .                        | 216 |
| 3.4. Stabilność . . . . .                                                    | 217 |
| 3.4.1. Stabilność układu równań różnicowych liniowych o stałych współ-       |     |
| czynnikach — 3.4.2. Badanie stabilności w przypadku aproksy-                 |     |
| macji układu równań różniczkowych układem różnicowym —                       |     |
| 3.4.3. Tworzenie formuł stabilnych                                           |     |
| 4. Bezpośrednie przybliżanie rozwiązania układu równań liniowych o stałych   |     |
| współczynnikach . . . . .                                                    | 221 |
| 4.1. Wzory całkowania . . . . .                                              | 222 |
| 4.1.1. Interpolacja wektora kolumnowego — 4.1.2. Uogólniony wzór             |     |
| Simpsona                                                                     |     |
| 4.2. Przybliżenie rozwiązania . . . . .                                      | 224 |
| VIII. Zagadnienia brzegowe. . . . .                                          | 226 |
| 1. Równania różniczkowe zwyczajne . . . . .                                  | 226 |
| 1.1. Równanie nieliniowe rzędu drugiego. Metoda strzału . . . . .            | 226 |
| 1.2. Równanie liniowe drugiego rzędu. Jednoznaczność rozwiązania. . . .      | 228 |
| 1.3. Równanie liniowe. Najważniejsze metody rozwiązywania. . . . .           | 229 |
| 1.3.1. Metoda różnicowa — 1.3.2. Metody kollokacji — 1.3.3. Uogóln-          |     |
| iona metoda kollokacji — 1.3.4. Porównanie metod; uwagi —                    |     |
| 1.3.5. Metoda Galerkina — 1.3.6. Porównanie różnych metod                    |     |
| 2. Równania eliptyczne . . . . .                                             | 239 |
| 2.1. Metoda różnicowa . . . . .                                              | 240 |
| 2.1.1. Prosty przykład — 2.1.2. Uogólnienia                                  |     |
| 2.2. Metoda kollokacji . . . . .                                             | 248 |
| 2.2.1. Zastosowanie wielomianu interpolacyjnego — 2.2.2. Zastosowa-          |     |
| nie dowolnej bazy                                                            |     |
| IX. Zagadnienia dyfuzji . . . . .                                            | 252 |
| 1. Zagadnienia liniowe o współczynnikach . . . . .                           | 253 |
| 1.1. Prosty przykład — jedna zmienna przestrzenna. Warunki brzegowe Di-      |     |
| richleta . . . . .                                                           | 253 |
| 1.2. Inny przykład — jedna zmienna przestrzenna. Warunki brzegowe Neu-       |     |
| mana . . . . .                                                               | 255 |
| 1.3. Zagadnienia z dwiema zmiennymi przestrzennymi . . . . .                 | 256 |
| 1.3.1. Metody różnicowe lub kollokacji — 1.3.2. Aproksymacja $\varphi$ w da- |     |
| nej bazie                                                                    |     |
| 1.4. Porównanie różnych metod obliczeniowych . . . . .                       | 259 |

|                                                                                                                                                                                                                           |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2. Zagadnienia liniowe o współczynnikach zależnych od $t$ i zagadnienia quasi-liniowe. Stabilność . . . . .                                                                                                               | 260        |
| 2.1. Metody . . . . .                                                                                                                                                                                                     | 260        |
| 2.2. Prosty przykład — jedna zmienna przestrzenna. Warunki brzegowe Dirichleta . . . . .                                                                                                                                  | 261        |
| 2.3. Przypadek ogólny. Inna definicja stabilności. . . . .                                                                                                                                                                | 264        |
| 2.3.1. Warunki von Neumanna lokalnej stabilności — 2.3.2. Badanie stabilności za pośrednictwem wektorów własnych macierzy $T$ —                                                                                           |            |
| 2.3.3. Kryteria stabilności wynikające z badania $\ T\ $                                                                                                                                                                  |            |
| <b>X. Równania hiperboliczne . . . . .</b>                                                                                                                                                                                | <b>270</b> |
| 1. Równanie pierwszego rzędu . . . . .                                                                                                                                                                                    | 270        |
| 1.1. Pojęcie pochodnej kierunkowej . . . . .                                                                                                                                                                              | 270        |
| 1.2. Rozwiązanie równania $a\varphi'_x = b\varphi'_y = c$ . Charakterystyka . . . . .                                                                                                                                     | 271        |
| 1.2.1. Równanie liniowe — 1.2.2. Równanie quasi-liniowe — 1.2.3. Metody numeryczne                                                                                                                                        |            |
| 2. Układy równań pierwszego rzędu . . . . .                                                                                                                                                                               | 275        |
| 2.1. Równanie rzędu wyższego niż jeden . . . . .                                                                                                                                                                          | 275        |
| 2.2. Sprowadzenie układu do postaci kanonicznej. Charakterystyki. . . . .                                                                                                                                                 | 276        |
| 2.3. Uwagi na temat charakterystyk . . . . .                                                                                                                                                                              | 279        |
| 2.3.1. Przypadek, w którym współczynniki $a, b, c, d$ są niezależne od $u$ oraz $v$ — 2.3.2. Przypadek, w którym współczynniki $a, b, c, d$ mogą zależeć od $u$ i $v$                                                     |            |
| 2.4. Metody numeryczne . . . . .                                                                                                                                                                                          | 284        |
| 2.4.1. Metoda Eulera — 2.4.2. Metoda interpolacyjna — 2.4.3. Zastosowania w zagadnieniach klasycznych                                                                                                                     |            |
| <b>XI. Równania całkowe o stałych granicach całkowania . . . . .</b>                                                                                                                                                      | <b>293</b> |
| 1. Niektóre własności równań całkowych . . . . .                                                                                                                                                                          | 293        |
| 1.1. Równanie drugiego rodzaju . . . . .                                                                                                                                                                                  | 293        |
| 1.1.1. Własności ogólne — 1.1.2. Jądra symetryczne                                                                                                                                                                        |            |
| 1.2. Równanie pierwszego rodzaju . . . . .                                                                                                                                                                                | 300        |
| 1.2.1. Jądro symetryczne — 1.2.2. Jądro niesymetryczne. Funkcje własne Schmidta                                                                                                                                           |            |
| 1.3. Wnioski . . . . .                                                                                                                                                                                                    | 306        |
| 2. Numeryczne metody rozwiązywania równań całkowych. . . . .                                                                                                                                                              | 307        |
| 2.1. Metody ogólne . . . . .                                                                                                                                                                                              | 307        |
| 2.1.1. Dyskretyzacja równania całkowego — 2.1.2. Rozwiązanie równania całkowego                                                                                                                                           |            |
| 2.2. Przykłady . . . . .                                                                                                                                                                                                  | 309        |
| 2.2.1. Równania całkowe drugiego rodzaju, w którym $\lambda$ nie jest wartością własną — 2.2.2. Równanie drugiego rodzaju, w którym $\lambda$ jest wartością własną — 2.2.3. Równanie całkowe osobliwe pierwszego rodzaju |            |

|                                                                                                                                              |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Dodatek A. Wielomiany Czebyszewa . . . . .</b>                                                                                            | <b>317</b> |
| 1. Definicja . . . . .                                                                                                                       | 317        |
| 2. Interpretacja graficzna $T_n(y)$ . . . . .                                                                                                | 317        |
| 3. Ortogonalność i pseudoortogonalność . . . . .                                                                                             | 320        |
| 4. Numeryczne obliczanie $P(y) = \sum_0^n a_k T_k(y)$ . . . . .                                                                              | 321        |
| 5. Obliczanie $T'_n(y)$ i $T''_n(y)$ . . . . .                                                                                               | 322        |
| <b>Dodatek B . . . . .</b>                                                                                                                   | <b>324</b> |
| 1. Pseudoortogonalność . . . . .                                                                                                             | 324        |
| 1.1. Obliczanie $\sum_{i=0}^n \cos \frac{2i+1}{2n+2} s\pi = Z(s)$ . . . . .                                                                  | 324        |
| 1.2. Obliczanie $\sum_{E_{n+1}} T_p(y_i) T_q(y_i)$ . . . . .                                                                                 | 325        |
| 1.3. Obliczanie $\sum_E \cos p\theta_j \cos q\theta_j, \sum_E \cos p\theta_j \sin q\theta_j, \sum_E \sin p\theta_j \sin q\theta_j$ . . . . . | 326        |
| 1.4. Obliczanie $Z'(s) = \sum_{j=1}^n \cos \left( s \frac{j\pi}{n+1} \right)$ . . . . .                                                      | 329        |
| 1.5. Obliczanie $\sum_{j=1}^n \sin \left( p \frac{j\pi}{n+1} \right) \sin \left( q \frac{j\pi}{n+1} \right)$ . . . . .                       | 329        |
| 2. Zastosowania . . . . .                                                                                                                    | 330        |
| 2.1. Macierze interpolacyjne i aproksymacyjne przy bazie i węzłach Czebyszewa . . . . .                                                      | 330        |
| 2.2. Macierze interpolacyjne i aproksymacyjne funkcji okresowych na węzłach równoodległych . . . . .                                         | 332        |
| 2.3. Funkcje okresowe nieparzyste . . . . .                                                                                                  | 333        |
| 3. Regularne macierze Lagrange'a . . . . .                                                                                                   | 334        |
| <b>Dodatek C. Przypomnienie kilku podstawowych własności ciągów, szeregów, wielomianów macierzowych . . . . .</b>                            | <b>336</b> |
| 1. Ciąg i szereg macierzy jednokolumnowych . . . . .                                                                                         | 336        |
| 2. Szereg macierzowy geometryczny . . . . .                                                                                                  | 337        |
| 3. Wielomiany macierzowe . . . . .                                                                                                           | 338        |
| 4. Szeregi nieskończone i funkcje macierzowe . . . . .                                                                                       | 339        |
| 5. Badanie macierzowego szeregu geometrycznego . . . . .                                                                                     | 340        |
| 6. Aproksymacja funkcji macierzowej wielomianem macierzowym . . . . .                                                                        | 341        |
| Literatura . . . . .                                                                                                                         | 348        |
| Skorowidz . . . . .                                                                                                                          | 350        |