

SPIS TREŚCI

Od autorów	12
Rozdział I. Wstępne wiadomości o zbiorach i liczbach	13
1. Elementy algebry zbiorów	13
1.1. Równość i inkluzja zbiorów	13
1.2. Dodawanie i mnożenie zbiorów	15
1.3. Różnica, dopełnienie, prawa de Morgana	17
2. Pojęcie pierścienia i ciała	19
2.1. Aksjomaty pierścienia przemennego	19
2.2. Pojęcie ciała. Podstawowe twierdzenia	21
3. Własności zbiorów liczbowych	23
3.1. Liczby naturalne	23
3.2. Zbiory uporządkowane	25
3.3. Zbiór liczb wymiernych, przekroje Dedekinda	26
4. Elementy kombinatoryki	28
4.1. Permutacje, wariacje i kombinacje bez powtórzeń	28
4.2. Dwumian Newtona	29
4.3. Permutacje jako przekształcenia	30
4.4. Wariacje, permutacje i kombinacje z powtórzeniami	32
Zadania	34
Rozdział II. Liczby zespolone	37
1. Definicja i działania	37
2. Postać trygonometryczna liczby zespolonej	39
Zadania	41
Rozdział III. Macierze i wyznaczniki	43
1. Algebra macierzy	43
1.1. Równość, dodawanie i odejmowanie macierzy oraz mnożenie macierzy przez liczbę	43
1.2. Mnożenie macierzy przez macierz	45
2. Wyznaczniki	47
2.1. Definicja wyznacznika	47
2.2. Wyznaczniki stopnia 1-go, 2-go i 3-go	49
3. Obliczanie wyznaczników wyższych stopni	50
3.1. Rozwinięcie Laplace'a	50
3.2. Własności wyznaczników	52
3.3. Obliczanie wyznaczników stopni wyższych niż trzeci	55
4. Wielomian charakterystyczny i wartości własne macierzy	56
5. Macierz odwrotna	57
5.1. Obliczanie macierzy odwrotnej	57
5.2. Własności i zastosowania macierzy odwrotnej	59
Zadania	61

Rozdział IV. Układy równań liniowych	63
1. Wektory i przestrzenie wektorowe	63
1.1. Pojęcie wektora i przestrzeni wektorowej	63
1.2. Kombinacje liniowe wektorów	64
2. Zależność liniowa wektorów, rząd macierzy, wektory bazowe	65
2.1. Określenie zależności liniowej wektorów	65
2.2. Własności rzędu macierzy przekształcenia	66
2.3. Baza przestrzeni n -wymiarowej	68
3. Układy oznaczone n równań liniowych o n niewiadomych	68
3.1. Zapis i warunki rozwiązalności układu	68
3.2. Wzory Cramera	69
3.3. Rozwiązanie w formie macierzowej	72
4. Układy n równań liniowych o m niewiadomych	73
4.1. Twierdzenie Kroneckera-Capelliego	73
4.2. Układy jednorodne	75
Zadania	78
Rozdział V. Elementy rachunku wektorowego	80
1. Wektory i skalary	80
2. Wersory i układ współrzędnych	80
3. Iloczyn skalarny i jego własności	83
4. Iloczyn wektorowy	84
Zadania	85
Rozdział VI. Elementy geometrii analitycznej na płaszczyźnie	86
1. Długość odcinka. Podział odcinka. Pole trójkąta	86
2. Zmiana układu współrzędnych	88
2.1. Przesunięcie równoległe układu	88
2.2. Obrót układu współrzędnych	88
3. Równanie prostej	89
4. Pewne zagadnienia związane z prostą	92
4.1. Prosta przechodząca przez punkt o danym kierunku	92
4.2. Równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty	93
4.3. Wzajemne położenie dwóch prostych	93
4.4. Odległość punktu od prostej i prostych równoległych	95
5. Krzywe stożkowe	96
5.1. Równanie okręgu koła	97
5.2. Okrąg koła i prosta	98
5.3. Elipsa	99
5.4. Hiperbola	102
5.5. Parabola	105
6. Równanie linii we współrzędnych biegunowych	106
6.1. Układ biegunowy	106
6.2. Długość odcinka. Pole trójkąta	107
6.3. Krzywe stożkowe w układzie biegunowym	107
7. Niektóre krzywe przestępne	109
7.1. Cykloidy	109
7.2. Epicykloida i hipocykloida	109
7.3. Ewolwenta koła	111
7.4. Spirala Archimedesesa	112
7.5. Spirala logarytmiczna	112
7.6. Linia łańcuchowa	113
Zadania	113

Rozdział VII. Elementy geometrii analitycznej w przestrzeni	115
1. Odległość punktów. Podział odcinka. Objętość czworościanu	115
2. Przesunięcie i obrót układu współrzędnych	116
3. Płaszczyzna	117
4. Prosta w przestrzeni trójwymiarowej	120
5. Kąty między prostymi w przestrzeni	121
6. Prosta przechodząca przez dwa punkty w przestrzeni	122
7. Prosta i płaszczyzna	123
8. Pewne powierzchnie drugiego stopnia	123
Zadania	124
Rozdział VIII. Funkcje jednej zmiennej	125
1. Wiadomości wstępne	125
2. Kres górny i kres dolny zbioru	126
3. Pojęcie i definicja funkcji	127
4. Klasyfikacja funkcji	132
4.1. Funkcje monotoniczne	132
4.2. Funkcje parzyste i nieparzyste	133
4.3. Funkcje różnowartościowe	133
4.4. Funkcje ograniczone	134
4.5. Funkcje odwrotne	134
4.6. Funkcje złożone (superpozycja funkcji)	135
5. Przegląd funkcji elementarnych	135
5.1. Funkcje algebraiczne całkowite (wielomiany)	135
5.2. Funkcje algebraiczne ułamkowe (funkcje wymierne)	136
5.3. Funkcje algebraiczne niewymierne	136
5.4. Funkcje trygonometryczne	136
5.5. Funkcje kołowe, czyli cyklometryczne	137
5.6. Funkcja wykładnicza $y = a^x$	140
5.7. Funkcja logarytmiczna $y = \log_a x$	141
Zadania	141
Rozdział IX. Ciągi liczbowe	143
1. Definicja ciągu. Przykłady ciągów	143
2. Klasyfikacja ciągów	144
2.1. Ciągi monotoniczne	144
2.2. Ciągi ograniczone	145
3. Granica ciągu	145
4. Własności ciągów zbieżnych	147
5. Kryteria zbieżności ciągów	148
6. Działania arytmetyczne na ciągach	149
7. Granice niewłaściwe	151
8. Obliczanie granic pewnych ciągów	153
8.1. Wzór Cauchy'ego	153
8.2. Liczba e	154
8.3. Liczba π	155
Zadania	155
Rozdział X. Nieskończone szeregi liczbowe	157
1. Definicja szeregu liczbowego. Zbieżność szeregów	157
2. Własności szeregów zbieżnych	158
3. Warunki dostateczne zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych	161
3.1. Kryterium porównawcze	161
3.2. Kryterium d'Alemberta	163

3.3. Kryterium Cauchy'ego	164
4. Szeregi naprzemienne	164
5. Szeregi bezwzględnie zbieżne i warunkowo zbieżne	165
6. Mnożenie szeregów nieskończonych	167
7. Reszty szeregu	168
Zadania	168
Rozdział XI. Granica i ciągłość funkcji	171
1. Granica funkcji	171
2. Granice jednostronne	172
3. Granice niewłaściwe	173
4. Twierdzenia o granicach funkcji	174
5. Obliczanie granic pewnych funkcji	175
6. Zachowanie się funkcji w nieskończoności	178
7. Ciągłość funkcji	178
8. Działania na funkcjach ciągłych	180
9. Własności funkcji ciągłych	181
10. Rodzaje nieciągłości	183
Zadania	186
Rozdział XII. Rachunek różniczkowy	187
1. Pochodna funkcji	187
2. Pochodne jednostronne. Różniczkowalność a ciągłość funkcji	189
3. Ogólne reguły obliczania pochodnych	191
4. Pochodne funkcji elementarnych	193
5. Pochodna funkcji złożonej	196
6. Zastosowania geometryczne pochodnych	197
7. Pochodna logarytmiczna funkcji	199
8. Różniczka funkcji i jej interpretacja geometryczna	199
9. Pochodna funkcji parametrycznej	202
10. Pochodne wyższych rzędów	203
11. Wzór Leibniza	204
12. Różniczki wyższych rzędów	205
Zadania	206
Rozdział XIII. Podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego	208
1. Twierdzenia o wartości średniej	208
2. Symbole nieoznaczone, Reguła de L'Hospitala	214
3. Badanie przebiegu zmienności funkcji	216
Zadania	226
Rozdział XIV. Funkcje wielu zmiennych	227
1. Zbiory płaskie. Obszary	227
2. Pojęcie funkcji dwóch i więcej zmiennych	227
3. Geometryczne przedstawienie funkcji dwu zmiennych	228
4. Granica funkcji dwóch zmiennych	229
5. Ciągłość funkcji dwóch zmiennych	229
6. Pochodne cząstkowe	230
7. Interpretacja geometryczna pochodnych cząstkowych	231
8. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów	231
9. Pochodne cząstkowe funkcji złożonej	233
10. Pochodne funkcji uwikłanej	234
11. Ekstremum funkcji dwóch zmiennych	235
12. Ekstrema warunkowe	237
13. Różniczka funkcji dwóch zmiennych	238
Zadania	239

Rozdział XV. Całka nieoznaczona	241
1. Definicja całki nieoznaczonej	241
2. Tablice całek podstawowych	243
3. Całkowanie iloczynu funkcji przez stałą oraz sumy i różnicy funkcji	243
4. Całkowanie przez części	244
5. Całkowanie przez podstawianie	244
5.1. Całkowanie funkcji złożonej liniowo	244
5.2. Całkowanie funkcji, której licznik jest pochodną mianownika	245
5.3. Całkowanie funkcji, które daje w wyniku funkcje cyklometryczne	245
5.4. Przykłady obliczania innych całek metodą podstawiania	247
6. Całkowanie funkcji wymiernych	248
6.1. Rozkład funkcji wymiernej	249
7. Całkowanie pewnych klas funkcji	252
Zadania	253
Rozdział XVI. Całka oznaczona	257
1. Definicja całki oznaczonej	257
2. Interpretacja geometryczna całki oznaczonej	257
3. Własności całki oznaczonej	258
4. Całkowanie przez części	261
5. Całkowanie przez podstawianie	262
6. Całkowanie przybliżone	262
6.1. Metoda prostokątów	262
6.2. Metoda trapezów	263
6.3. Metoda Simpsona	264
7. Całka niewłaściwa	265
8. Zastosowanie całek	266
8.1. Zastosowanie całek do obliczania pól	266
8.2. Długość łuku krzywej	267
8.3. Pole powierzchni i objętość brył obrotowych	268
8.4. Zastosowanie całek w mechanice i fizyce	269
Zadania	271
Rozdział XVII. Całka podwójna	272
1. Definicja całki podwójnej	272
2. Interpretacja geometryczna całki podwójnej	273
3. Zamiana całki podwójnej na iterowaną	274
Zadania	277
Rozdział XVIII. Ciągi i szeregi funkcyjne	279
1. Ciągi funkcyjne	279
2. Zbieżność punktowa i granica ciągu funkcyjnego	280
3. Zbieżność jednostajna	280
4. Szeregi funkcyjne	283
5. Różniczkowanie i całkowanie ciągu funkcyjnego	284
6. Szeregi potęgowe	286
7. Ciągłość, różniczkowalność i całkowność sumy szeregu potęgowego	288
8. Szereg Taylora	289
9. Działania na szeregach potęgowych	292
10. Zastosowania szeregów potęgowych	293
10.1. Przybliżanie funkcji za pomocą wielomianów	293
10.2. Zastosowanie do obliczania przybliżonej wartości funkcji	293
10.3. Zastosowanie do rozwiązywania równań	294
Zadania	294

Rozdział XIX. Elementy układów ortogonalnych	296
1. Uwagi wstępne	296
2. Układy ortogonalne	296
3. Szeregi ortogonalne	299
4. Uogólnienia	301
5. Ogólne pojęcia normy oraz iloczynu skalarnego	303
6. Przestrzeń funkcji całkowalnych	305
7. Układ trygonometryczny	309
8. Współczynniki Fouriera	312
9. Różniczkowanie i całkowanie szeregu Fouriera	314
10. Dodatkowe uwagi o rozwinięciach Fouriera	316
11. Zbieżność szeregów Fouriera	317
Zadania	319
Rozdział XX. Elementy równań różniczkowych zwyczajnych	320
1. Wprowadzenie	320
2. Równania pierwszego rzędu	322
2.1. Równania o rozdzielonych zmiennych	322
2.2. Równania różniczkowe jednorodne	323
2.3. Równania sprowadzalne do równania jednorodnego	324
2.4. Równanie różniczkowe liniowe pierwszego rzędu	326
2.5. Równanie różniczkowe Bernoulli'ego	327
2.6. Równania różniczkowe zupełne	328
2.7. Rozwiązywanie równań różniczkowych za pomocą czynnika całkującego	330
3. Równania różniczkowe drugiego rzędu	332
3.1. Proste typy równań różniczkowych drugiego rzędu	332
3.2. Równania różniczkowe liniowe drugiego rzędu	334
3.3. Obniżenie rzędu równania jednorodnego postaci (20.41)	337
3.4. Równania różniczkowe liniowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach	338
4. Elementy równań różniczkowych wyższych rzędów	342
4.1. Pewne całkowalne typy równań rzędów wyższych	342
4.2. Równania różniczkowe liniowe rzędów wyższych o stałych współczynnikach	343
5. Rozwiązywanie równań różniczkowych metodą Picarda	344
Zadania	346
Rozdział XXI. Elementy równań różnicowych i funkcyjnych	350
1. Wprowadzenie	350
2. Pewne typy równań różnicowych i funkcyjnych	352
3. Liniowe równania różnicowe i funkcyjne o stałych współczynnikach	355
4. Układy równań różnicowych i funkcyjnych	366
5. Pewne typy równań różnicowych i funkcyjnych liniowych o zmiennych współczynnikach	370
5.1. Równania różnicowe rzędu pierwszego o zmiennych współczynnikach	371
5.2. Równania funkcyjne rzędu pierwszego o zmiennych współczynnikach	372
5.3. Równania funkcyjne o rozwiązaniach gamma Eulera	373
Zadania	374
Rozdział XXII. Pewne przykłady równań różniczkowo-różnicowych	376
1. Wprowadzenie	376
2. Równania zstępujące	377
3. Równania neutralne	379
4. Równania wstępujące	380
Zadania	384

Rozdział XXIII. Skale funkcyjne i nomogramy	385
1. Obliczanie wartości funkcji $y = f(x)$ z jej wykresu	385
2. Skala funkcyjna	387
3. Skala logarytmiczna	390
4. Papier logarytmiczny i półlogarytmiczny	392
5. Nomogramy. Nomogramy siatkowe	394
6. Nomogramy kolineacyjne	397
7. Nomogramy kolineacyjne dla funkcji uwikłanych postaci $h(z) = f(x) + g(y)$	398
8. Nomogramy kolineacyjne dla funkcji uwikłanych postaci $\frac{1}{h(z)} = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(y)}$	400
9. Nomogramy kolineacyjne dla funkcji uwikłanych postaci $h(z) = \frac{f(x)}{g(y)}$	402
10. Nomogramy kolineacyjne dla funkcji uwikłanych postaci $f(x) g(y) h(z) = 1$	405
Rozdział XXIV. Wstępne wiadomości o programowaniu matematycznym	408
1. Ogólne uwagi wprowadzające	408
2. Zadanie programowania liniowego oraz jego rozwiązanie	410
3. Metoda simplex	412
3.1. Poszukiwanie programu optymalnego	412
3.2. Algorytm metody simplex	413
4. Typowe zadania programowania liniowego; przykład liczbowy	416
4.1. Zadanie wykorzystania środków	416
4.2. Zadanie optymalizacji diety	417
4.3. Zadanie optymalnego wykorzystania materiałów	417
5. Rozwiązywanie zadań programowania nieliniowego	419
6. Interpretacja ekonomiczna — przykład	421
7. Metoda programowania dynamicznego	422
8. Elementy ryzyka i nieokreśloności w programowaniu matematycznym	425
Bibliografia	427