

## SPIS TREŚCI

|                                                                                                                                                         | Str. |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Od tłumacza . . . . .                                                                                                                                   | 7    |
| Rozdział I. Wstęp do analizy . . . . .                                                                                                                  | 9    |
| § 1. Wielkości zmienne i funkcje. Oznaczenia . . . . .                                                                                                  | 9    |
| § 2. Dziedzina (zbiór określoności czyli istnienia) funkcji . . . . .                                                                                   | 14   |
| § 3. Sporządzanie wykresu funkcji punkt po punkcie . . . . .                                                                                            | 17   |
| § 4. Sporządzanie wykresu funkcji przez przesuwanie i odkształcanie<br>znanego wykresu innej funkcji . . . . .                                          | 23   |
| § 5. Zmienna jako uporządkowany zbiór liczbowy. Granica zmiennej.<br>Wielkości nieskończenie małe i nieskończenie wielkie. Granica<br>funkcji . . . . . | 29   |
| § 6. Twierdzenia o nieskończeniu małych i o granicach . . . . .                                                                                         | 38   |
| § 7. Obliczanie granic . . . . .                                                                                                                        | 41   |
| § 8. Zadania mieszane na znajdowanie granic . . . . .                                                                                                   | 55   |
| § 9. Porównywanie wielkości nieskończenie małych . . . . .                                                                                              | 57   |
| § 10. Ciągłość funkcji. Punkty nieciągłości . . . . .                                                                                                   | 61   |
| Rozdział II. Pochodna i różniczka funkcji . . . . .                                                                                                     | 71   |
| § 1. Pochodna funkcji i jej sens geometryczny. Różniczkowalność<br>funkcji. Bezpośrednie wyznaczanie pochodnej . . . . .                                | 71   |
| § 2. Pochodne prostszych funkcji algebraicznych i trygonometrycz-<br>nych . . . . .                                                                     | 75   |
| § 3. Pochodna funkcji złożonej . . . . .                                                                                                                | 79   |
| § 4. Pochodne funkcji wykładniczych i logarytmicznych . . . . .                                                                                         | 82   |
| § 5. Pochodne funkcji cyklometrycznych (kołowych), czyli funkcji<br>odwrotnych do funkcji trygonometrycznych . . . . .                                  | 84   |
| § 6. Różne zadania na różniczkowanie . . . . .                                                                                                          | 86   |
| § 7. Pochodna logarytmiczna . . . . .                                                                                                                   | 91   |
| § 8. Pochodne wyższych rzędów . . . . .                                                                                                                 | 93   |
| § 9. Pochodne funkcji uwikłanej . . . . .                                                                                                               | 95   |
| § 10. Różniczkowanie funkcji danej równaniami parametrycznymi . . . . .                                                                                 | 99   |
| § 11. Styczna i normalna do krzywej płaskiej. Kąt między dwiema<br>krzywymi . . . . .                                                                   | 102  |
| § 12. Prędkość zmian wielkości zmiennej. Prędkość i przyspieszenie<br>w ruchu prostoliniowym . . . . .                                                  | 110  |
| § 13. Różniczka funkcji . . . . .                                                                                                                       | 113  |



|                                                                                                                           |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 14. Funkcja wektorowa argumentu skalarne <i>g</i> o i jej różniczkowanie.<br>Styczna do krzywej przestrzennej . . . . . | 116 |
| § 15. Prędkość i przyspieszenie ruchu krzywoliniowego . . . . .                                                           | 119 |
| Rozdział III. Badanie funkcji oraz sporządzanie ich wykresów . . . . .                                                    | 122 |
| § 1. Twierdzenie (wzór) Taylora . . . . .                                                                                 | 122 |
| § 2. Reguła de l'Hospitala i jej zastosowanie przy poszukiwaniu<br>granicy funkcji . . . . .                              | 134 |
| § 3. Przedziały monotoniczności funkcji . . . . .                                                                         | 140 |
| § 4. Maksimum i minimum, czyli ekstrema funkcji . . . . .                                                                 | 142 |
| § 5. Największa i najmniejsza wartość funkcji . . . . .                                                                   | 150 |
| § 6. Zadania na poszukiwanie największej i najmniejszej wartości<br>funkcji . . . . .                                     | 154 |
| § 7. Wypukłość i wklęsłość krzywej oraz punkty przegięcia . . . . .                                                       | 160 |
| § 8. Asymptoty . . . . .                                                                                                  | 164 |
| § 9. Schemat ogólny badania funkcji i sporządzania ich wykresów . . . . .                                                 | 169 |
| § 10. Przybliżone rozwiązywanie równań . . . . .                                                                          | 183 |
| § 11. Krzywizna krzywej płaskiej . . . . .                                                                                | 189 |
| Rozdział IV. Całka nieoznaczona . . . . .                                                                                 | 195 |
| § 1. Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona. Podstawowe wzory ra-<br>chunku całkowego . . . . .                           | 195 |
| § 2. Całkowanie przez rozkład na sumę całek . . . . .                                                                     | 202 |
| § 3. Całkowanie przez podstawienie . . . . .                                                                              | 203 |
| § 4. Całkowanie przez części . . . . .                                                                                    | 206 |
| § 5. Całki funkcji zawierających trójmian kwadratowy: . . . . .                                                           | 210 |
| $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx, \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx, \int \sqrt{ax^2+bx+c} dx$                         |     |
| § 6. Całkowanie funkcji trygonometrycznych . . . . .                                                                      | 215 |
| § 7. Całkowanie funkcji wymiernych . . . . .                                                                              | 219 |
| § 8. Całkowanie niektórych funkcji niewymiernych . . . . .                                                                | 225 |
| § 9. Całkowanie niektórych funkcji przestępnych (niealgebraicz-<br>nych) . . . . .                                        | 230 |
| § 10. Zadania mieszane na obliczanie całek . . . . .                                                                      | 232 |
| Rozdział V. Całka oznaczona . . . . .                                                                                     | 233 |
| § 1. Całka oznaczona jako granica sum całkowych, jej własności<br>i związek z całką nieoznaczoną . . . . .                | 233 |
| § 2. Zamiana zmiennej w całce oznaczonej . . . . .                                                                        | 236 |
| § 3. Schemat zastosowania całki oznaczonej do obliczania różnych<br>wielkości. Pole figury płaskiej . . . . .             | 239 |
| § 4. Wyznaczanie objętości bryły na podstawie znajomości pól prze-<br>krojów równoległych . . . . .                       | 248 |
| § 5. Objętość bryły obrotowej . . . . .                                                                                   | 251 |
| § 6. Długość łuku krzywej płaskiej . . . . .                                                                              | 256 |
| § 7. Pole powierzchni obrotowej . . . . .                                                                                 | 260 |



|                                                                                                                                              |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| § 8. Zadania z zakresu fizyki . . . . .                                                                                                      | 265        |
| § 9. Współrzędne środka ciężkości . . . . .                                                                                                  | 281        |
| § 10. Całki niewłaściwe . . . . .                                                                                                            | 285        |
| § 11. Całkowanie przybliżone . . . . .                                                                                                       | 290        |
| <b>Rozdział VI. Funkcje wielu zmiennych . . . . .</b>                                                                                        | <b>296</b> |
| § 1. Funkcje wielu zmiennych, ich oznaczanie i obszar określoności . . . . .                                                                 | 296        |
| § 2. Granica funkcji wielu zmiennych. Ciągłość . . . . .                                                                                     | 299        |
| § 3. Pochodne cząstkowe funkcji wielu zmiennych . . . . .                                                                                    | 302        |
| § 4. Różniczki funkcji wielu zmiennych . . . . .                                                                                             | 304        |
| § 5. Różniczkowanie funkcji złożonych . . . . .                                                                                              | 308        |
| § 6. Różniczkowanie funkcji uwikłanych . . . . .                                                                                             | 310        |
| § 7. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów . . . . .                                                                                            | 311        |
| § 8. Płaszczyzna styczna i prosta normalna do powierzchni . . . . .                                                                          | 314        |
| § 9. Ekstrema funkcji wielu zmiennych . . . . .                                                                                              | 316        |
| § 10. Najmniejsza i największa wartość funkcji (ekstremum absolutne) . . . . .                                                               | 319        |
| <b>Rozdział VII. Całki wielokrotne, krzywoliniowe i powierzchniowe . . . . .</b>                                                             | <b>326</b> |
| § 1. Całka podwójna i jej obliczanie przez dwukrotne całkowanie . . . . .                                                                    | 327        |
| § 2. Całka podwójna we współrzędnych biegunowych . . . . .                                                                                   | 338        |
| § 3. Obliczanie pól za pomocą całki podwójnej . . . . .                                                                                      | 342        |
| § 4. Obliczanie objętości bryły . . . . .                                                                                                    | 345        |
| § 5. Masa, środek ciężkości i momenty bezwładności . . . . .                                                                                 | 349        |
| § 6. Całka potrójna i jej obliczanie przez trzykrotne całkowanie . . . . .                                                                   | 356        |
| § 7. Obliczanie wielkości za pomocą całki potrójnej . . . . .                                                                                | 364        |
| § 8. Całki krzywoliniowe i ich obliczanie. Warunek niezależności od drogi całkowania . . . . .                                               | 374        |
| § 9. Obliczanie wielkości za pomocą całek krzywoliniowych . . . . .                                                                          | 381        |
| § 10. Wyznaczanie funkcji, gdy jest dana jej różniczka zupełna . . . . .                                                                     | 386        |
| § 11. Całki powierzchniowe i ich obliczanie przez zamianę na całki podwójne . . . . .                                                        | 388        |
| § 12. Obliczanie wielkości za pomocą całek powierzchniowych . . . . .                                                                        | 399        |
| <b>Rozdział VIII. Elementy teorii pola . . . . .</b>                                                                                         | <b>405</b> |
| § 1. Pole skalarne. Pochodna kierunkowa. Gradient . . . . .                                                                                  | 405        |
| § 2. Pole wektorowe. Strumień i dywergencja pola . . . . .                                                                                   | 411        |
| § 3. Cyrkulacja i wirowość (rotacja) pola wektorowego . . . . .                                                                              | 416        |
| <b>Rozdział IX. Szeregi . . . . .</b>                                                                                                        | <b>421</b> |
| § 1. Szeregi liczbowe zbieżne i rozbieżne. Warunek konieczny zbieżności szeregu. Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich . . . . . | 421        |
| § 2. Zbieżność bezwzględna i warunkowa szeregu o wyrazach dowolnych. Kryterium zbieżności szeregów przemiennej . . . . .                     | 427        |
| § 3. Szeregi funkcyjne . . . . .                                                                                                             | 431        |
| § 4. Szereg Taylora . . . . .                                                                                                                | 435        |



|                                                                                                   |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 5. Działania na szeregach potęgowych. Zastosowanie szeregów do obliczeń przybliżonych . . . . . | 441 |
| § 6. Szeregi liczbowe i potęgowe o wyrazach zespolonych . . . . .                                 | 449 |
| § 7. Szeregi Fouriera . . . . .                                                                   | 454 |
| § 8. Całka Fouriera . . . . .                                                                     | 470 |
| Rozdział X. Równania różniczkowe . . . . .                                                        | 475 |
| § 1. Równania różniczkowe. Rząd równania. Całka ogólna i całka szczególna . . . . .               | 475 |
| § 2. Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych . . . . .                                     | 478 |
| § 3. Równania różniczkowe pierwszego rzędu jednorodne względem $x$ i $y$ . . . . .                | 481 |
| § 4. Równania różniczkowe liniowe pierwszego rzędu i równanie Bernoulliego . . . . .              | 483 |
| § 5. Równania różniczkowe zupełne . . . . .                                                       | 487 |
| § 6. Równania wyższych rzędów sprowadzalne do równań rzędu niższego . . . . .                     | 488 |
| § 7. Równania różniczkowe liniowe jednorodne wyższych rzędów o stałych współczynnikach . . . . .  | 492 |
| § 8. Równania liniowe niejednorodne wyższych rzędów o stałych współczynnikach . . . . .           | 495 |
| § 9. Zadania mieszane na całkowanie równań różniczkowych różnych typów . . . . .                  | 504 |
| § 10. Zadania prowadzące do równań różniczkowych . . . . .                                        | 505 |
| § 11. Metoda Eulera przybliżonego całkowania równań pierwszego rzędu . . . . .                    | 522 |
| § 12. Całkowanie równań za pomocą szeregów . . . . .                                              | 524 |
| § 13. Układy równań różniczkowych liniowych . . . . .                                             | 529 |
| § 14. Równania fizyki matematycznej . . . . .                                                     | 534 |
| Odpowiedzi . . . . .                                                                              | 543 |