

Spis treści

Wstęp	xv
I Liczby	1
1 Liczby naturalne i zasada indukcji matematycznej	3
1.1 Odkrywanie wzorów i zasada indukcji	3
1.2 Dwumian Newtona i Σ -notacja	12
2 Liczby rzeczywiste i lemat Cantora	15
2.1 Liczby wymierne i niewymierne	16
2.2 Kresy i lemat Cantora	18
3 Ciągi i granice	21
3.1 Intuicje i rachunki	21
3.2 Trochę teorii i algorytm Herona	25
3.3 Liczba π	29
3.4 Archimedes	31
4 Szeregi geometryczne i ułamki łańcuchowe	32
4.1 Szeregi geometryczne i liczby rzeczywiste	32
4.2 Ułamki łańcuchowe	35
5 Przeliczalność, nieprzeliczalność i liczby kardynalne	38
5.1 Przeliczalność, nieprzeliczalność i hipoteza continuum	38
5.2 Liczby kardynalne i twierdzenie Cantora	41
5.3 O liczbach przestępnych	43
5.4 Cantor	44

II	Pochodna, całka i twierdzenie Newtona-Leibniza	45
6	Pochodna	48
6.1	Pochodna, prędkość i podstawowe wzory	48
6.2	Pierwsze zastosowania	54
6.3	Kartezjusz i Fermat	58
7	Całka oznaczona	59
7.1	Nieformalne wprowadzenie	59
7.2	Definicja i własności całki oznaczonej	63
7.3	Riemann	68
8	Całka nieoznaczona i wzór Newtona-Leibniza	69
8.1	Całka nieoznaczona	69
8.2	Wzór Newtona-Leibniza	72
8.3	Newton i Leibniz	75
9	Ciągłość	77
9.1	Intuicje i przykłady	77
9.2	Dwa formalizmy	82
9.3	Jednostajna ciągłość i całkowalność funkcji ciągłych	85
9.4	Lagrange i Cauchy	87
10	Od lematu Cantora do twierdzenia Lagrange'a ...	88
10.1	Dwa twierdzenia o ciągłości	89
10.2	Twierdzenia Lagrange'a i lemat o funkcji stałej	92
10.3	Twierdzenie o wartości średniej dla całek i jego konsekwencje	96
10.4	Zbiór Cantora i funkcja Cantora*	99
III	Funkcje przestępne i aproksymacje	101
11	Funkcje przestępne i równania różniczkowe	103
11.1	EkspONENTA	104
11.2	Funkcje trygonometryczne	106
11.3	Dwa klasyczne zastosowania	110
12	Funkcje przestępne i całki	114
12.1	Logarytm naturalny	114
12.2	Funkcje kołowe	117

13 Aproksymacje liniowe, reguły de l'Hôpitala i wypukłość	121
13.1 Aproksymacje liniowe	121
13.2 Wypukłość	123
13.3 Reguły de L'Hôpitala i twierdzenie Cauchy'ego	126
13.4 Bernoulli	129
14 Aproksymacje wielomianowe i liczba e	131
14.1 Wzory Maclaurina i Taylora	131
14.2 Rozwinięcia Maclaurina	134
14.3 Liczba e	136
14.4 Taylor i Maclaurin	138
15 W kręgu twierdzenia Weierstrassa	139
15.1 Twierdzenie Weierstrassa	139
15.2 Zbieżność punktowa a zbieżność jednostajna	141
15.3 Weierstrass	144
IV Od technik całkowania do funkcji gamma i transformaty Laplace'a	145
16 Techniki całkowania	147
16.1 Całkowanie przez podstawienie	147
16.2 Całkowanie przez części i redukcje	151
16.3 Całkowanie funkcji wymiernych	153
17 Objętości, pola powierzchni i rzutowanie Merkatora	157
17.1 Zasada Cavalieriego i objętość kuli	157
17.2 Długość krzywej i pole powierzchni obrotowej	161
17.3 Kilka słów o kartografii	164
18 Całki podwójne i współrzędne biegunowe	167
18.1 Całki podwójne i iterowane	167
18.2 Współrzędne biegunowe i zamiana zmiennych	171
19 Obszary nieograniczone i całki niewłaściwe	174
19.1 Całki niewłaściwe	174
19.2 Kryteria zbieżności	178
19.3 Nadzwyczaj użyteczna całka	180
19.4 Crelle i Liouville	182

20 Aproksymacje całkowe i funkcja gamma	183
20.1 Aproksymacje całkowe	183
20.2 Funkcja gamma	186
20.3 Stirling	190
21 Transformata Laplace'a	191
21.1 Własności transformaty Laplace'a	191
21.2 Transformata Laplace'a i równania różniczkowe	194
V Od aproksymacji do sum dokładnych: szeregi	199
22 Szeregi liczbowe	201
22.1 Szereg harmoniczny i kryterium całkowe	201
22.2 Dwa dalsze kryteria: porównawcze i ilorazowe	206
22.3 Dwa typy zbieżności	209
22.4 Kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego	211
22.5 D'Alembert	213
23 Rozwinięcia Maclaurina	214
23.1 Rozwijanie funkcji w szereg Maclaurina	215
23.2 Funkcje zadane szeregiem potęgowym	219
23.3 Dwa dowody niewymierności	222
23.4 Hermite i Lindemann	225
24 Operacje na szeregach i wzór Leibniza	226
24.1 Operacje na szeregach	226
24.2 Wzór Leibniza i obliczanie π	229
24.3 Szalone rachunki Leonharda Eulera*	233
24.4 Euler	235
25 Liczby zespolone i funkcje przestępne	236
25.1 Liczby zespolone	237
25.2 Liczby zespolone i funkcje przestępne	239
25.3 Logarytm zespolony i wzór Leibniza	242
26 Szeregi Fouriera i ich zastosowania	244
26.1 Szeregi Fouriera	244
26.2 Kwestie zbieżności	249
26.3 Fourier	254

VI Geometria i aproksymacje	255
27 Przestrzenie liniowe	257
27.1 Określenia i przykłady	257
27.2 Niezależność, baza i wymiar	262
27.3 Pierwsze zastosowania	267
28 Norma, iloczyn skalarny i przestrzenie euklidesowe	270
28.1 Metryka i norma	270
28.2 Iloczyn skalarny i przestrzenie euklidesowe	273
28.3 Ortogonalność i kąty	276
29 Rzut ortogonalny i aproksymacje	279
29.1 Bazy ortonormalne i ortogonalizacja Grama-Schmidta	279
29.2 Rzut ortogonalny i dopełnienie ortogonalne	282
29.3 Aproksymacje i szeregi Fouriera	286
29.4 Hilbert	288
VII Macierze i przekształcenia liniowe	289
30 Macierze i metoda eliminacji	291
30.1 Działania na macierzach	291
30.2 Metoda eliminacji i odwracanie macierzy	296
30.3 Macierze elementarne i kryterium odwracalności	301
31 Przekształcenia liniowe	304
31.1 Przekształcenia liniowe a macierze	304
31.2 Jądro i obraz przekształcenia liniowego	310
31.3 Przekształcenia liniowe $L : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$	312
32 Rząd macierzy i twierdzenie Kroneckera-Capellego	314
32.1 Rząd macierzy	314
32.2 Układy równań liniowych i twierdzenie Kroneckera-Capellego	318
33 Wyznaczniki	320
33.1 Małe wyznaczniki	320
33.2 Własności wyznaczników	323
33.3 Wzory Cramera i macierz odwrotna	330
33.4 Takakazu Seki	334

34 Wartości i wektory własne, diagonalizacja i potęgowanie ...	335
34.1 Wartości i wektory własne, wielomian charakterystyczny	335
34.2 Diagonalizacja	339
34.3 Potęgowanie macierzy i twierdzenie Cayleya-Hamiltona	343
35 Zastosowania diagonalizacji i wektorów własnych	346
35.1 Sieci i rankingi	346
35.2 Dyskretne układy dynamiczne i procesy Markowa	348
36 Przekształcenia ortogonalne	354
36.1 Przekształcenia i macierze ortogonalne	354
36.2 Przekształcenia ortogonalne na płaszczyźnie	359
36.3 Przekształcenia ortogonalne w przestrzeni	362
VIII Przestrzenie metryczne, topologia i aksjomat wyboru	365
37 Przestrzenie metryczne	367
37.1 Metryki i zbiory otwarte	367
37.2 Zbiory domknięte, domknięcie i wnętrze	373
37.3 Funkcje ciągłe na przestrzeniach metrycznych	375
38 Zupełność i twierdzenie Baire'a	377
38.1 Własności przestrzeni zupełnych	377
38.2 Twierdzenie Baire'a	379
39 Przestrzenie topologiczne	382
39.1 Podstawowe pojęcia topologii	382
39.2 Ciągłość i topologia podprzestrzeni	385
39.3 Topologia iloczynu kartezjańskiego i dwa klasyczne przykłady .	387
39.4 Przestrzenie ilorazowe, torus i butelka Kleina*	390
40 Aksjomaty przeliczalności i oddzielania	393
40.1 Aksjomaty przeliczalności i ośrodkowość	393
40.2 Aksjomaty oddzielania	395
41 Zwartość	399
41.1 Przestrzenie zwarte	400
41.2 Funkcje ciągłe na przestrzeniach zwartych	404
41.3 Zwartość w przestrzeniach metrycznych	405

42 Spójność	410
42.1 Spójność i łukowa spójność	410
42.2 Lokalna spójność i twierdzenie Hahna-Mazurkiewicza	413
43 Dwa twierdzenia o punkcie stałym	416
43.1 Twierdzenie Brouwera i jego zastosowania	416
43.2 Twierdzenie Banacha i równania różniczkowe	420
43.3 Banach	425
44 Topologia przestrzeni funkcyjnych	426
44.1 Metryki na przestrzeniach funkcyjnych	426
44.2 Ciągłość przekształceń liniowych	430
45 Aksjomat wyboru i jego konsekwencje	432
45.1 Aksjomat wyboru i lemat Kuratowskiego-Zorna	432
45.2 Dwa klasyczne zastosowania	434
Epilog	438
Uwagi o literaturze	443
Odpowiedzi i wskazówki	445
Indeks	472