

Spis treści

Wstęp	xv
I Kombinatoryka	1
1 Permutacje i kombinacje, czyli sztuka mnożenia	3
1.1 Permutacje i kombinacje bez powtórzeń	3
1.2 Ustawienia i kombinacje z powtórzeniami	9
2 Współczynniki dwumianowe i liczby Fibonacciego	13
2.1 Współczynniki dwumianowe i trójkąt Pascala	13
2.2 Tożsamości kombinatoryczne	15
2.3 Liczby Fibonacciego	19
2.4 Pascal	24
3 Wzór włączeń i wyłączeń, czyli sztuka dodawania	25
3.1 Wzór włączeń i wyłączeń i jego zastosowania	25
3.2 Liczby Stirlinga i liczby Bella	28
3.3 Nieporządki i punkty stałe permutacji	30
4 Równoważności i porządki	33
4.1 Relacje równoważności, typy i rozbicia na klasy	33
4.2 Porządki i twierdzenie Spernera	36
II Prawdopodobieństwo	39
5 Podstawowe pojęcia	42
5.1 Przestrzeń zdarzeń i rozkład prawdopodobieństwa	42
5.2 Prawdopodobieństwo warunkowe i niezależność	45
5.3 Prawdopodobieństwo geometryczne	48
5.4 De Moivre	50

6	Trzy zadania z nieoczekiwaną odpowiedzią	51
6.1	Paradoksy nietranzytywności	51
6.2	Paradoks urodzinowy	53
6.3	Problem sekretarki	55
7	Zmienna losowa i problem kolekcjonera	59
7.1	Zmienna losowa i jej rozkład	59
7.2	Czekanie na sukces i problem kolekcjonera	62
8	Nierówność Czebyszewa i prawo wielkich liczb	65
8.1	Miary rozproszenia: wariancja i odchylenie standardowe	65
8.2	Nierówność Czebyszewa	68
8.3	Rozkład dwumianowy i prawo wielkich liczb	70
8.4	Laplace i Czebyszew	73
9	Aproksymacje rozkładu dwumianowego	75
9.1	Aproksymacja poissonowska	76
9.2	Rozkład normalny i aproksymacja gaussowska	80
9.3	Gauss	82
10	Prawdopodobieństwo i funkcje tworzące	83
10.1	Inne spojrzenie na wartość średnią i wariancję	83
10.2	Zadanie o ruinie gracza	86
10.3	Błądzenie losowe*	87
10.4	Pólya	90
III	Liczby zespolone i konstrukcje geometryczne	91
11	Liczby zespolone i zasadnicze twierdzenie algebry	93
11.1	Wprowadzenie	94
11.2	Zasadnicze twierdzenie algebry i faktoryzacja wielomianów . . .	98
11.3	Dowód zasadniczego twierdzenia algebry	101
12	Pierwiastki z jedności, wielokąty foremne i wzory Cardana	103
12.1	Postać trygonometryczna i wzór de Moivre'a	103
12.2	Pierwiastkowanie i postać wykładnicza	106
12.3	Pierwiastki z jedności a wielokąty foremne	108
12.4	Równania algebraiczne trzeciego stopnia	110

13 Pierścienie, ciała i faktoryzacja wielomianów	114
13.1 Pierścienie i ciała	114
13.2 Pierścień $\mathbb{F}[x]$ i faktoryzacja	118
13.3 Algorytm Euklidesa i lemat Bezouta	121
14 Pierścienie ilorazowe i ciała skończone	124
14.1 Pierścienie ilorazowe i ciała	124
14.2 Ciała skończone	128
15 Rozszerzenia ciał i konstrukcje geometryczne	132
15.1 Rozszerzenia ciała liczb wymiernych	132
15.2 Konstrukcje geometryczne	135
15.3 Euklides i jego <i>Elementy</i>	138
IV Grupy i symetrie	139
16 Symetrie figur i pojęcie grupy	141
16.1 Symetrie figur i grupy przekształceń	141
16.2 Ogólne pojęcie grupy	144
16.3 Kilka prostych, ale ważnych twierdzeń	147
17 Podgrupy, iloczyny i twierdzenie Lagrange’a	151
17.1 Podgrupy	151
17.2 Grupy cykliczne i iloczyn grup	154
17.3 Twierdzenie Lagrange’a i rozbicia na warstwy	156
17.4 Twierdzenia Cauchy’ego i Sylowa	159
18 Grupy permutacji	161
18.1 Permutacje i grupa symetryczna S_n	161
18.2 Parzystość permutacji i grupy alternujące A_n	164
18.3 O tasowaniu kart	167
19 Izomorfizm i struktura grup	170
19.1 Izomorfizm	170
19.2 Generatory i relacje	173
19.3 Twierdzenie Cayleya	176
19.4 Noether i van der Waerden	178

20 Symetrie wielościanów	179
20.1 Trzy łatwe wielościany	179
20.2 Dwa przypadki trudniejsze	183
21 Dzielniki normalne, homomorfizmy i grupy ilorazowe	185
21.1 Elementy sprzężone i dzielniki normalne	185
21.2 Grupy proste	188
21.3 Homomorfizmy i grupy ilorazowe*	190
22 Wprowadzenie do teorii Galois*	193
22.1 Automorfizmy ciał	194
22.2 Ciało rozkładu wielomianu i grupa Galois	196
22.3 Nierozwiązalność równań piątego stopnia	199
22.4 Abel i Galois	201
V Teoria liczb	203
23 Liczby pierwsze: od Euklidesa do Eulera	205
23.1 Twierdzenie Euklidesa i sito Eratostenesa	205
23.2 Zeta Riemanna i twierdzenie Eulera	209
23.3 Cztery problemy Landaua	211
24 Kongruencje i ich zastosowania	214
24.1 Kongruencje	214
24.2 Dwa klasyczne twierdzenia: Wilsona i Fermata	217
24.3 Twierdzenia Lagrange'a i jego zastosowania	220
25 Funkcja Eulera i pierwiastki pierwotne	222
25.1 Funkcja Eulera i twierdzenie Eulera	222
25.2 Pierwiastki pierwotne	225
25.3 Twierdzenie Dirichleta	227
25.4 Dirichlet	229
26 Protokoły kryptograficzne i rozpoznawanie pierwszości	230
26.1 Szyfry symetryczne i uzgadnianie klucza	231
26.2 RSA	234
26.3 Rozpoznawanie pierwszości	237
26.4 Faktoryzacja*	240

27 Rozmieszczenie liczb pierwszych	244
27.1 Twierdzenie o rozmieszczeniu Liczb pierwszych	244
27.2 Twierdzenie Czebyszewa i hipoteza Sierpińskiego	249
27.3 Elementarne oszacowania funkcji $\pi(x)^*$	250
28 Sumy potęg i liczby wielokątne	254
28.1 Lemat Minkowskiego i twierdzenie Fermata-Eulera	255
28.2 Twierdzenia Lagrange’a	259
28.3 Sumy potęg i twierdzenie Hilberta-Waringa	261
28.4 Liczby wielokątne i twierdzenie Cauchy’ego	264
28.5 Sierpiński	265
29 Równania diofantyczne	266
29.1 Równanie Pitagorasa	267
29.2 Równanie Pella	271
29.3 Ułamki łańcuchowe i równanie Pella	274
VI Grafy, geometria i gra	277
30 Grafy, drogi i cykle	279
30.1 Język teorii grafów	279
30.2 Mosty królewieckie i grafy eulerowskie	281
30.3 Grafy hamiltonowskie i dwudzielnosc	283
30.4 Izomorfizm i zliczanie grafów	286
31 Drzewa i twierdzenie Cayleya	289
31.1 Drzewa i związki acykliczne	289
31.2 Kody Prüfera i twierdzenie Cayleya	291
31.3 Macierz grafu i twierdzenie Kirchoffa	294
31.4 Cayley	296
32 Grafy planarne i wzór Eulera	297
32.1 Planarnosc i wzór Eulera	297
32.2 Twierdzenie o czterech barwach i kolorowanie grafów	301
32.3 Kombinatoryka, geometria i gra	304
32.4 Conway	307

33 Parkietaże, wielościany i czwarty wymiar	308
33.1 Parkietaże	308
33.2 Wielościany platońskie i archimedesowe	310
33.3 Czwarty wymiar i jeszcze dalej	313
34 Być albo nie być, czyli kwestie istnienia	317
34.1 Zasada szufladkowa	318
34.2 Kolorowanie i parzystość	321
34.3 Proste twierdzenie o prostych	323
34.4 Żołnierze Conwaya	324
34.5 Gardner	327
35 Twierdzenia ramseyowskie	328
35.1 Gra w trójkąty i liczby Ramseya	328
35.2 Twierdzenie van der Waerdena	332
35.3 Dwa oszacowania*	335
35.4 Erdős	338
VII Geometria nieeuklidesowa	339
36 Geometria sfery	342
36.1 Proste i okręgi na sferze	343
36.2 Kąty, trójkąty i twierdzenie Pitagorasa	346
36.3 Twierdzenie Girarda-Harriota i pola wielokątów	348
36.4 Harriot i Girard	350
37 Przekształcenia Möbiusa i inwersje	351
37.1 Przekształcenia Möbiusa	351
37.2 Własności inwersji	358
38 Płaszczyzna hiperboliczna	362
38.1 Punkty, proste i piąty postulat	362
38.2 Homografie rzeczywiste i przystawanie	366
38.3 Długość krzywej i odległość	369
38.4 Łobaczewski i Bolyai	372
39 Twierdzenie Gaussa-Bonneta i jego konsekwencje	373
39.1 Pole trójkąta i twierdzenie Gaussa-Bonneta	373
39.2 Wielokąty i parkietaże	377
39.3 Kąt równoległości i absolutna miara długości	380
39.4 Poincaré	382

VIII	Złożoność, obliczalność i twierdzenie Gödla	383
40	Złożoność algorytmów i zagadnienie P-NP	386
40.1	Algorytmy sortowania i złożoność problemów	386
40.2	Hierarchia funkcji i zagadnienie P-NP	392
41	Granice obliczalności i problem stopu	394
41.1	Obliczalność i rozstrzygalność	394
41.2	Funkcja Rado i problem stopu	398
41.3	Turing	401
42	Twierdzenie Gödla i równania diofantyczne	402
42.1	Formalizacja arytmetyki i twierdzenie Gödla	403
42.2	Rekurencyjna przeliczalność i zbiory diofantyczne	408
42.3	Peano i Gödel	411
	Epilog	413
	Uwagi o literaturze	419
	Odpowiedzi i wskazówki	421
	Indeks	450