

Spis treści

Wstęp	IX
I. Repetytorium z matematyki elementarnej	1
1. Liczby naturalne: indukcja matematyczna • wzór Bernoulliego • permutacje, kombinacje • wzór dwumienny Newtona	1
2. Liczby rzeczywiste: liczby całkowite i wymierne • aksjomat Dedekinda • potęgowanie • pierwiastkowanie • logarytmowanie • wartość bezwzględna	13
3. Wielomiany: równania algebraiczne • twierdzenie Bézouta • wzory Viète'a • przewidywanie pierwiastków wymiernych	32
4. Geometria euklidesowa: proste, półproste, kąty • cechy przystawiania trójkątów • twierdzenie o kącie wewnętrznym • twierdzenie Talesa • twierdzenie Pitagorasa	38
5. Trygonometria: funkcje trygonometryczne kąta ostrego • funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów • funkcje trygonometryczne dowolnego kąta • twierdzenie Carnota (wzór cosinusów)	72
6. Dodatek 1: zasadnicze twierdzenie arytmetyki • liczby pierwsze • sito Eratostenesa	88
7. Dodatek 2: wzór Cardana	93
II. Elementy analizy matematycznej	99
8. Zbiory i funkcje: operacje na zbiorach • iloczyn kartezjański • relacje równoważności i zasada abstrakcji • relacje porządkujące • funkcja jako zbiór (funkcje złożone, funkcje odwrotne) • pewnik wyboru • zbiory przeliczalne (przeliczalność $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) • zbiory nieprzeliczalne (nieprzeliczalność $\mathbb{R}$) • hipoteza continuum	99
9. Funkcje elementarne: funkcje liniowe • równania prostej i okręgu na płaszczyźnie • funkcje potęgowe • funkcje trygonometryczne i cyklometryczne • funkcje wykładnicze i logarytmiczne	126
10. Ciągi liczbowe: ciągi definiowane rekurencyjnie • ciąg Fibonacciego (wzór Bineta) • granica ciągu • ciągi monotoniczne (liczba Nepera e) • obliczanie pierwiastków (metoda Herona) • twierdzenie o trzech ciągach • twierdzenie Bolzano–Weierstrassa • twierdzenie Borela–Lebesgue'a (o pokryciach)	136

11. Szeregi liczbowe: szeregi geometryczne • kryteria zbieżności szeregów • szeregi naprzemienne (kryterium Leibniza) • kryterium Cauchy'ego i kryterium d'Alemberta • szeregi bezwzględnie zbieżne • niewymierność liczby e • kryterium kondensacyjne	158
12. Iloczyny nieskończone: związki z szeregami liczbowymi • rozbieżność szeregu odwrotności liczb pierwszych • ilość liczb pierwszych nie większych niż x : $\pi(x) > \ln(x+1) - 1$ • twierdzenie Eulera–Wallisa: $\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$ • wzór Wallisa: $\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n! 2^n)^4}{n((2n)!)^2}$	171
13. Dodatek 1: liczby rzeczywiste	183
14. Dodatek 2: liczba π	195
III. Elementy algebry wyższej	200
15. Liczby zespolone: postać algebraiczna • postać trygonometryczna • płaszczyzna Gaussa • wzór de Moivre'a • pierwiastki liczb zespolonych	200
16. Struktury algebraiczne: grupy i półgrupy • kongruencje • cechy podzielności • małe twierdzenie Fermata • homomorfizmy • grupy ilorazowe • twierdzenie Lagrange'a o rzędzie grupy • funkcja ϕ Eulera • grupy cykliczne • generatory • jądro homomorfizmu • centrum grupy	209
17. Pierścienie i ciała: pierścienie $\mathbb{Z}_p$ reszt z dzielenia przez p • pierścień $\mathbb{P}[x]$ wielomianów zmiennej x • dzielenie wielomianów • ogólne twierdzenie Bézouta • ideały • pierścienie ilorazowe • ideały maksymalne • twierdzenie Schura o ciałach skończonych	239
18. Pierścienie wielomianów: wielomiany nierozkładalne • rozszerzenia ciał o pierwiastki wielomianu (twierdzenie Kroneckera) • lemat Gaussa • kryterium Eisensteina • ogólne twierdzenie Viète'a • wielomiany symetryczne • zasadnicze twierdzenie algebry	252
19. Przestrzenie liniowe: baza przestrzeni liniowej • macierze • wyznaczniki • wzór Laplace'a • twierdzenie Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy • macierze odwrotne • macierzowa reprezentacja liczb zespolonych • kwaterniony • układy Cramera	271
20. Rozszerzenia ciał: stopień rozszerzenia • rozszerzenia algebraiczne • rozszerzenia normalne • ciało rozkładu wielomianu • grupy Galois • zasadnicze twierdzenie teorii Galois	303
21. Klasyczne konstrukcje geometryczne: trysekcja kąta • podwojenie sześcianu • kwadratura koła • konstruowalność wielokątów foremnych	321
22. Dodatek 1: wyznacznik Vandermonde'a • wzór interpolacyjny Lagrange'a	339
23. Dodatek 2: wyznacznik jako alternująca funkcja wieloliniowa • wzór Cauchy'ego–Bineta na wyznacznik iloczynu macierzy • wyprowadzenie wzoru Laplace'a	346
24. Dodatek 3: konstrukcja siedemnastokąta foremnego	354
IV. Rachunek różniczkowy i całkowy	363
25. Ciągłość: granice funkcji • funkcje ciągłe • twierdzenie Bolzano • własność Darboux • twierdzenie Weierstrassa • ekstrema funkcji • warunek Cauchy'ego ciągłości funkcji • jednostajna ciągłość	363
26. Różniczkowanie: pochodna funkcji • reguły różniczkowania • twierdzenie Rolle'a • twierdzenia o wartości średniej (Lagrange'a, Cauchy'ego) • ekstrema lokalne funkcji • reguła de l'Hospitala • twierdzenie Darboux • pochodne wyższych rzędów • funkcje wypukłe • wzór Taylora	380

27. Całkowanie: całka Riemanna funkcji ciągłej • twierdzenie o wartości średniej dla całek • zasadnicze twierdzenie rachunku całkowego • wzór Leibniza–Newtona • całka nieoznaczona (funkcja pierwotna) • całkowanie funkcji elementarnych • reguły całkowania	412
28. Całka niewłaściwa i funkcje specjalne: kryterium całkowe zbieżności szeregu • liczba Eulera–Mascheroniego γ • funkcja Γ Eulera • funkcja β Eulera • twierdzenie Eulera–Gaussa: $\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^x}{1+\frac{x}{n}}$ • całka Poissona: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ • funkcja ζ Riemanna • wzór iloczynowy Eulera: $\zeta(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_n^{-x}}$	428
29. Ciągi i szeregi funkcyjne: jednostajna zbieżność ciągu funkcyjnego • różniczkowanie i całkowanie ciągów funkcyjnych (lemat Diniego) • szeregi funkcyjne • funkcja Weierstrassa (ciągła nieróżniczkowalna) • szeregi potęgowe (twierdzenie Abela) • rozwinięcia w szereg Taylora	446
30. Zastosowania: liczba Liouville’a: $\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ • wzór Eulera: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ • wzór Stirlinga: $n! = \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n+\frac{\alpha_n}{12n}}$	466
31. Dodatek 1: wielomiany i szeregi o wyrazach zespolonych • twierdzenie Mertensa o mnożeniu szeregów • twierdzenie Eulera: $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ • tożsamość Eulera: $e^{i\pi} + 1 = 0$	474
32. Dodatek 2: przestępność liczby e (twierdzenie Hermite’a) • przestępność liczby π (twierdzenie Lindemanna)	487
Bibliografia	501
I. Bibliografia ogólna (matematyka elementarna, historia matematyki i filozofia matematyki)	501
II. Podstawy analizy matematycznej (zbiory, funkcje, ciągi, szeregi, iloczyny nieskończone)	503
III. Algebra wyższa (struktury algebraiczne, algebra linowa, konstrukcje geometryczne)	503
IV. Analiza wyższa (rachunek różniczkowy, rachunek całkowy, szeregi funkcyjne)	504
Skorowidz	505
Spis symboli	511
Spis nazwisk	514