

SPIS TREŚCI

Przedmowa.....	11
Spis oznaczeń.....	13
Notacja.....	17
1 Wstęp.....	19
2 Kinematyka.....	27
2.1 Wprowadzenie.....	27
2.2 Opis materialny i opis przestrzenny.....	28
2.3 Miary deformacji.....	30
2.3.1 Gradient deformacji.....	31
2.3.2 Gradient przemieszczenia.....	42
2.3.3 Tensor deformacji.....	43
2.3.4 Tensor odkształcenia.....	45
2.3.5 Miary deformacji – podsumowanie.....	46
2.3.6 Interpretacja składowych materialnego tensora odkształcenia.....	47
2.4 Równania geometryczne (kinematyczne).....	49
2.5 Teoria małych odkształceń.....	51
2.5.1 Tensor małych odkształceń i tensor małych obrotów.....	51
2.5.2 Uzasadnienie dla stosowania teorii liniowej.....	52
2.5.3 Związki geometryczne Cauchy'ego.....	53
2.5.4 Interpretacja składowych tensora małych odkształceń.....	53
2.5.5 Interpretacja składowych tensora małych obrotów.....	58
2.5.6 Inne warianty uproszczonej teorii.....	60
2.6 Zmiana długości krzywej w wyniku deformacji sprężystej.....	61
2.7 Zmiana kąta między włóknami w wyniku deformacji sprężystej.....	61
2.8 Zmiana objętości w wyniku deformacji sprężystej.....	62
2.9 Zmiana pola powierzchni w wyniku deformacji sprężystej.....	64
2.10 Uogólnione miary odkształcenia.....	66
2.10.1 Uogólnione tensory odkształcenia Setha–Hilla.....	67
2.11 Miary prędkości deformacji.....	69
2.12 Warunki nierozdzielności.....	71
2.12.1 Warunki nierozdzielności dla dużych odkształceń.....	71
2.12.2 Warunki nierozdzielności dla małych odkształceń.....	74
2.13 Podsumowanie.....	78
3 Statyka i dynamika.....	81
3.1 Zasada zachowania masy.....	81
3.1.1 Równanie ciągłości.....	82
3.2 Siły i naprężenia.....	83
3.2.1 Siły zewnętrzne.....	83
3.2.2 Siły wewnętrzne.....	85
3.2.3 Uwagi dodatkowe o siłach.....	86
3.3 Zasady dynamiki Newtona dla ośrodka ciągłego.....	89
3.4 Tensor naprężenia.....	90
3.4.1 Warunki czworościanu.....	90
3.4.2 Tensor naprężenia Cauchy'ego.....	95
3.4.3 Nieziemienniki tensora naprężenia.....	97

3.4.4	Naprężenia główne i kierunki naprężeń głównych.....	98
3.4.5	Wybrane przypadki stanu naprężenia.....	99
3.5	Równania ruchu.....	101
3.5.1	Zasada pędu – równania ruchu w opisie przestrzennym.....	101
3.5.2	Zasada krętu – symetria tensora naprężenia Cauchy'ego.....	102
3.5.3	Warunki graniczne.....	104
3.5.4	Równania ruchu w opisie materialnym.....	106
3.5.5	Naprężenia nominalne – tensor naprężenia Pioli–Kirchhoffa 1 rodzaju.....	107
3.5.6	Zasada pędu, zasada krętu i równania ruchu w opisie materialnym.....	108
3.5.7	Symetryczny tensor naprężenia Pioli–Kirchhoffa 2 rodzaju.....	110
3.6	Alternatywne miary naprężenia.....	112
3.7	Różne miary naprężenia w opisie materialnym i przestrzennym.....	112
3.8	Podsumowanie.....	113
4	Równania konstytutywne i energia sprężysta.....	115
4.1	Postulaty materiałowe.....	115
4.1.1	Zasada determinizmu.....	115
4.1.2	Zasada lokalności.....	116
4.1.3	Zasada obiektywności materialnej.....	116
4.1.4	Teoria pierwszego gradientu.....	117
4.2	Jednorodność i izotropia.....	119
4.3	Materiał sprężysty.....	120
4.3.1	Materiał hipersprężysty.....	121
4.3.2	Materiał Hooke'a – materiał liniowo-sprężysty.....	127
4.4	Doświadczalne wyznaczanie związków konstytutywnych.....	140
4.4.1	Quasi-statyczna próba jednoosiowego rozciągania.....	141
4.4.2	Quasi-statyczna próba ścinania.....	146
4.4.3	Przykładowe wartości modułów sztywności dla wybranych materiałów.....	148
4.4.4	Wyznaczanie funkcyjnej postaci związków fizycznych w materiałach izotropowych.....	149
4.5	Praca sił wewnętrznych i energia sprężysta.....	151
4.5.1	Praca i moc w ciałach odkształcalnych.....	151
4.5.2	Energetycznie sprzężone miary odkształcenia i naprężenia.....	153
4.5.3	Praca i energia odkształcenia sprężystego.....	159
4.5.4	Zasada prędkości wirtualnych.....	160
4.6	Przykładowe modele ciał nieliniowo-sprężystych.....	164
4.6.1	Materiał Mooney'a–Rivlina.....	166
4.6.2	Materiał neo-hooke'owski.....	167
4.6.3	Materiał Genta.....	168
4.6.4	Materiał Yeoh.....	168
4.7	Rozkład widmowy tensorów Hooke'a.....	169
4.7.1	Twierdzenie o rozkładzie widmowym tensorów sprężystości.....	173
4.7.2	Rozkład widmowy tensorów sprężystości według klas symetrii.....	174
4.7.3	Rozkład widmowy płaskich tensorów sprężystości według klas symetrii.....	187
4.7.4	Rozkład główny energii sprężystej.....	190
4.8	Warunki Cauchy'ego.....	193
4.9	Warunki Burzyńskiego.....	200

4.10	Podsumowanie.....	202
5	Teoria liniowa.....	205
5.1	Linearyzacja teorii.....	205
5.1.1	Liniowość geometryczna.....	207
5.1.2	Liniowość fizyczna.....	211
5.2	Równania liniowej teorii sprężystości.....	212
5.2.1	Równania przemieszczeniowe Lamégo dla izotropii.....	212
5.2.2	Równania naprężeniowe Beltramiego–Michella dla izotropii.....	214
5.2.3	Komplet równań liniowej teorii sprężystości w krzywoliniowych układach współrzędnych.....	217
5.3	Metody rozwiązywania problemów liniowej teorii sprężystości.....	219
5.3.1	Poprawne postawienie problemu.....	221
5.3.2	Całkowanie związków geometrycznych.....	223
5.3.3	Jednoznaczność rozwiązania równań równowagi.....	224
5.3.4	Biharmoniczny rozkład przemieszczeń.....	226
5.3.5	Metody odwrotne i półodwrotne.....	228
5.3.6	Tensor naprężeń Beltramiego i funkcje naprężeń dla izotropowych zagadnień statyki.....	229
5.3.7	Potencjały dla izotropowych zagadnień statyki.....	233
5.4	Zagadnienia płaskie dla izotropii.....	239
5.4.1	Płaski stan naprężenia.....	239
5.4.2	Płaski stan odkształcenia.....	241
5.4.3	Równania rządzące zagadnieniami płaskimi.....	242
5.4.4	Zastosowanie funkcji Airy'ego.....	243
5.4.5	Zagadnienia płaskie w układzie współrzędnych biegunowych.....	245
5.4.6	Warunki brzegowe dla funkcji Airy'ego.....	253
5.4.7	Elastooptyka.....	257
5.4.8	Rozwiązania zagadnień płaskich z wykorzystaniem potencjałów zespolonych.....	263
5.5	Fale sprężyste.....	274
5.5.1	Sferyczne fale sprężyste w materiałach izotropowych.....	274
5.5.2	Płaskie fale sprężyste.....	279
5.5.3	Fale powierzchniowe.....	293
5.6	Uogólnienia teorii liniowej.....	308
5.6.1	Ośrodek mikropolarny – teoria niesymetrycznej sprężystości braci Cosserat.....	308
5.6.2	Ośrodek mikromorficzny – teoria drugiego gradientu Mindlina.....	311
5.7	Podsumowanie.....	320
6	Twierdzenia energetyczne.....	325
6.1	Energia wewnętrzna i praca sił zewnętrznych.....	326
6.2	Wektor strumienia energii.....	327
6.3	Zasada przemieszczeń wirtualnych.....	329
6.4	Twierdzenie Lagrange'a – minimum całkowitej energii potencjalnej.....	332
6.5	Zasada naprężeń wirtualnych.....	334
6.6	Twierdzenie Castigliano – minimum całkowitej energii uzupełniającej.....	337
6.7	Zasada wzajemności prac Bettiego–Maxwella.....	338
6.7.1	Wzory Somigliany.....	340

6.8	Uwagi ogólne do twierdzeń energetycznych	343
6.9	Metody wariacyjne.....	343
6.9.1	Metoda Ritza.....	343
6.9.2	Metoda elementów skończonych.....	345
6.9.3	Metoda elementów brzegowych.....	349
7	Wybrane zagadnienia liniowej teorii sprężystości.....	353
7.1	Zagadnienie Kelvina.....	357
7.1.1	Rozwiązania pochodne.....	365
7.2	Zagadnienie Boussinesqa.....	371
7.2.1	Półprzestrzeń obciążona równomiernie na obszarze kołowym.....	377
7.2.2	Półprzestrzeń obciążona równomiernie na obszarze prostokątnym.....	377
7.3	Zagadnienie Cerrutiego.....	379
7.4	Zagadnienie Lamégo.....	385
7.4.1	Szczególne przypadki rozwiązań zagadnienia Lamégo.....	387
7.5	Zagadnienie Flamanta.....	389
7.5.1	Półpłaszczyzna obciążona na brzegu siłą skupioną.....	393
7.5.2	Półpłaszczyzna obciążona na brzegu siłą normalną.....	394
7.5.3	Półpłaszczyzna obciążona jednorodnym obciążeniem normalnym.....	396
7.6	Zagadnienia kontaktowe.....	399
7.6.1	Zagadnienie sztywnego stempla.....	406
7.7	Zagadnienie dysku ściskanego.....	409
7.8	Zagadnienie Kirscha.....	415
7.8.1	Jednoosiowe równomierne rozciąganie tarczy z otworem.....	416
7.8.2	Dwuosiowe równomierne rozciąganie tarczy z otworem.....	419
7.8.3	Czyste ścinanie tarczy z otworem.....	420
7.9	Zagadnienie pęknięcia.....	421
7.9.1	Rozwieranie pęknięcia – obciążenie typu I.....	422
7.9.2	Ścinanie w płaszczyźnie tarczy – obciążenie typu II.....	429
7.9.3	Ścinanie w płaszczyźnie prostopadłej – obciążenie typu III.....	430
7.10	Rozciąganie prętów.....	433
7.10.1	Równanie pręta rozciąganego.....	437
7.10.2	Drgania podłużne pręta.....	438
7.11	Zginanie prętów.....	447
7.11.1	Belka Bernoulliego–Eulera.....	451
7.11.2	Drgania poprzeczne belki.....	459
7.11.3	Wzór Żurawskiego.....	470
7.11.4	Belka Timoszenki.....	473
7.12	Skręcanie prętów.....	479
7.12.1	Skręcanie prętów o przekroju kołowym i rurowym.....	486
7.12.2	Skręcanie prętów o przekroju eliptycznym.....	487
7.12.3	Skręcanie prętów o przekroju trójkąta równobocznego.....	488
7.12.4	Skręcanie prętów o przekroju prostokątnym.....	489
7.12.5	Równanie pręta skręcanego.....	490
7.12.6	Drgania skrętne pręta.....	491
7.13	Teoria płyt zginanych.....	493
7.13.1	Siły przekrojowe w płytach.....	493
7.13.2	Równania równowagi dla płyt.....	494

7.13.3	Teoria Kirchhoffa–Love'a – kinematyki płyty cienkiej.....	496
7.13.4	Związki kinematyczne w płytach cienkich.....	498
7.13.5	Związki konstytutywne w płytach cienkich.....	499
7.13.6	Siły przekrojowe w izotropowych cienkich płytach zginanych.....	501
7.13.7	Wzory transformacyjne dla sił przekrojowych.....	504
7.13.8	Równania równowagi dla izotropowych płyt cienkich.....	505
7.13.9	Warunki brzegowe.....	507
7.13.10	Rozwiązanie Naviera.....	514
7.13.11	Izotropowe płyty kołowe i pierścieniowe.....	516
7.13.12	Izotropowe płyty osiowosymetryczne.....	517
7.13.13	Drgania poprzeczne płyt cienkich.....	518
7.13.14	Teoria zginania umiarkowanie grubych płyt Mindlina–Reissnera.....	521
A	Elementy rachunku tensorowego.....	525
A.1	Przestrzeń wektorowa.....	525
A.2	Wektory kontrawariantne.....	528
A.3	Wektory kowariantne.....	530
A.3.1	Baza dualna.....	533
A.4	Przestrzeń afiniczna.....	536
A.5	Układ współrzędnych.....	536
A.5.1	Zmiana układu współrzędnych.....	537
A.6	Lokalna baza i kobaza układu współrzędnych.....	538
A.6.1	Baza lokalna.....	538
A.6.2	Kobaza lokalna.....	541
A.6.3	Geometryczna interpretacja bazy i kobazy lokalnej.....	543
A.7	Tensory.....	544
A.7.1	Iloczyn diadyczny.....	545
A.7.2	Rząd i typ tensora.....	547
A.7.3	Reguła transformacji składowych dla tensorów.....	548
A.7.4	Tensory jako odwzorowania liniowe.....	550
A.7.5	Działania na tensorach.....	551
A.8	Geometria Riemanna.....	557
A.8.1	Metryka.....	557
A.8.2	Norma.....	557
A.8.3	Iloczyn skalarny.....	558
A.8.4	Geometria różniczkowa riemannowskiej – tensor metryczny.....	559
A.8.5	Iloczyn skalarny w różniczkowej riemannowskiej.....	561
A.8.6	Tensor metryczny w przestrzeni euklidesowej.....	564
A.8.7	Składowe fizyczne.....	565
A.9	Absolutny rachunek różniczkowy.....	566
A.9.1	Pochodna absolutna pola wektorowego.....	568
A.9.2	Symbole Christoffela.....	569
A.9.3	Pochodna kowariantna składowej kontrawariantnej pola wektorowego.....	572
A.9.4	Pochodna kowariantna składowej kowariantnej pola wektorowego.....	574
A.9.5	Składowe kontrawariantne pochodnej kowariantnej.....	575
A.9.6	Pochodna kowariantna pola tensorowego.....	576
A.9.7	Operatory różniczkowe dla pól tensorowych.....	577

A.10	Równania liniowej teorii sprężystości w krzywoliniowych układach	
	współrzędnych.....	580
A.10.1	Układ współrzędnych walcowych.....	584
A.10.2	Układ współrzędnych sferycznych.....	586
Literatura.....		591
Streszczenie.....		595
Skorowidz.....		597