

Spis treści

Rozdział 1. Prawdopodobieństwo	15
1. Twierdzenie Borela o liczbach normalnych	15
Przedział jednostkowy	15
Słabe prawo wielkich liczb	18
Mocne prawo wielkich liczb	21
Mocne a słabe prawo wielkich liczb	25
Rozszerzenie pojęcia prawdopodobieństwa	25
Zadania	26
2. Miary probabilistyczne	29
Przestrzenie	29
Klasy zbiorów	29
Miary probabilistyczne	32
Miara Lebesgue'a na przedziale jednostkowym	36
Konstruowanie σ -ciał*	39
Zadania	41
3. Istnienie i rozszerzenie miary	45
Konstrukcja rozszerzenia	45
Jednoznaczność i twierdzenie o π - λ -układach	49
Klasy monotoniczne	51
Zupełność	51
Miara Lebesgue'a na przedziale jednostkowym	52
Zbiory niemierzalne	53
Zadania	54
4. Prawdopodobieństwo na przestrzeniach dyskretnych	56
Wzory ogólne	57
Granice ciągu zbiorów	57
Zdarzenia niezależne	59
Podciała	61
Lematy Borela–Cantellego	63
Prawo zero-jedynkowe	67
Mocne a słabe prawo wielkich liczb	68
Zadania	69
5. Zmienne losowe proste	72
Definicja	72
Niezależność	75
Istnienie ciągów niezależnych zmiennych losowych	77
Wartość oczekiwana	79
Nierówności	83
Zadania	85

* Gwiazdka oznacza tematy, które mogą być pominięte przy pierwszym czytaniu.

6. Prawo wielkich liczb	88
Mocne prawo	88
Słabe prawo	90
Twierdzenie Bernsteina	91
Udoskonalenie drugiego lematu Borela–Cantellego	92
Zadania	94
7. Gry hazardowe	96
Ruina gracza	97
Równanie różnicowe	99
Systemy gry	100
Strategie gry	103
Śmiała gra*	107
Ostrożna gra*	113
Zadania	113
8. Łańcuchy Markowa	115
Definicje	115
Prawdopodobieństwo przejścia w n krokach	119
Twierdzenie o istnieniu	120
Stan chwilowy i stan powracający	121
Inne kryterium dla stanu powracającego	126
Rozkłady stacjonarne	130
Twierdzenie o zbieżności*	134
Stopowanie optymalne*	136
Zadania	142
9. Wielkie odchylenia i prawo iterowanego logarytmu*	145
Funkcja tworząca momenty	146
Wielkie odchylenia	148
Twierdzenie Chernoffa	151
Prawo iterowanego logarytmu	153
Zadania	157

Rozdział 2. Miara 158

10. Ogólna definicja miary	158
Klasy zbiorów	158
Konwencje dotyczące ∞	159
Miary	160
Jednoznaczność rozszerzenia miary	162
Zadania	163
11. Miara zewnętrzna	164
Miara zewnętrzna	164
Rozszerzenie miary	165
Twierdzenie aproksymacyjne	168
Warunek Carathéodory'ego*	168
Zadania	170
12. Miary na przestrzeni euklidesowej	171
Miara Lebesgue'a	171
Regularność	174
Miary na prostej	175
Miary na przestrzeni R^k	176
Zadania	179

13. Funkcje mierzalne i odwzorowania mierzalne	181
Odwzorowania mierzalne	181
Odwzorowania w R^k	182
Granice i mierzalność	183
Przeniesienie miar	185
Zadania	185
14. Dystrybuanty	187
Dystrybuanty	187
Rozkłady wykładnicze	189
Słaba zbieżność	190
Zbieżność typów*	192
Rozkłady ekstremalne*	194
Równanie Cauchy'ego	197
Zadania	197

Rozdział 3. Całkowanie 200

15. Całka	200
Definicja	200
Funkcje nieujemne	201
Jednoznaczność	204
Zadania	204
16. Własności całki	206
Równania i nierówności	206
Całkowanie granicy ciągu funkcji	208
Gęstości	212
Zamiana zmiennych	214
Jednakowa całkowalność	215
Funkcje zespolone	216
Zadania	216
17. Całka względem miary Lebesgue'a	218
Całka Lebesgue'a na prostej	218
Całka Riemanna	218
Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego	221
Zamiana zmiennych	222
Całka Lebesgue'a w przestrzeni R^k	223
Całka Stieltjesa	224
Zadania	225
18. Miary produktowe i twierdzenie Fubiniego	227
Przestrzeń produktowa	227
Miary produktowe	228
Twierdzenie Fubiniego	230
Całkowanie przez części	233
Przestrzeń produktowa wyższych rzędów	234
Zadania	235
19. Miara Hausdorffa*	240
Definicja	240
Stała normująca	241
Zamiana zmiennych	245
Pole powierzchni kuli w przestrzeni R^k	249
Zadania	250

Rozdział 4. Zmienne losowe i wartości oczekiwane	253
20. Zmienne losowe i ich rozkłady	253
Zmienne losowe i wektory losowe	253
Podciała	254
Rozkłady zmiennych losowych	254
Niezależność	259
Ciągi zmiennych losowych	263
Splot	264
Zbieżność według prawdopodobieństwa	266
Twierdzenie Gliwienki–Cantellego*	267
Zadania	269
21. Wartości oczekiwane	272
Wartość oczekiwana jako całka	272
Wartości oczekiwane i rozkłady	273
Momenty	273
Nierówności	275
Kowariancja	276
Niezależność i wartość oczekiwana	277
Funkcje tworzące momenty	277
Zadania	280
22. Sumy niezależnych zmiennych losowych	283
Prawo zero-jedynkowe Kołmogorowa	283
Nierówność Kołmogorowa	285
Zbieżność szeregów losowych	286
Mocne prawo wielkich liczb	287
Słabe prawo wielkich liczb i funkcje tworzące momenty	290
Szeregi losowe Taylora*	291
Zadania	294
23. Proces Poissona	297
Charakterystyka rozkładu wykładniczego	297
Proces Poissona	297
Dwie inne charakteryzacje procesu Poissona	302
Procesy stochastyczne	304
Zadania	306
24. Teoria kolejek i błędzenie losowe	307
Kolejka z jednym obsługującym	307
Błędzenie losowe i wskaźniki drabinowe	310
Wykładniczy prawy ogon	313
Wykładniczy lewy ogon	316
Długość kolejki	319
Rozdział 5. Zbieżność rozkładów	321
25. Słaba zbieżność	321
Definicje	321
Rozkład jednostajny modulo 1*	322
Zbieżność według rozkładów	324
Zbieżność według prawdopodobieństwa	325
Podstawowe twierdzenia	327
Twierdzenie Helleya o wyborze	330
Całkowanie granicy zmiennych losowych	332

Metoda przekątniowa	334
Zadania	335
26. Funkcje charakterystyczne	337
Definicja	337
Momenty i pochodne	338
Niezależność	340
Twierdzenie o odwróceniu i jednoznaczności	341
Twierdzenie o ciągłości	345
Zadania	347
27. Centralne twierdzenie graniczne	350
Składniki o jednakowym rozkładzie	350
Twierdzenie Lindeberga i Lapunowa	352
Twierdzenie Feller'a*	356
Zmienne losowe zależne*	358
Zadania	364
28. Rozkłady nieskończenie podzielne*	366
Zbieżność niewłaściwa	367
Możliwe rozkłady graniczne	367
Charakteryzowanie granicy	371
Zadania	372
29. Twierdzenie graniczne w przestrzeni R^*	374
Podstawowe twierdzenia	375
Funkcje charakterystyczne	379
Rozkłady normalne w przestrzeni R^*	382
Centralne twierdzenie graniczne	383
Twierdzenie Skorochoda w przestrzeni R^{**}	384
Zadania	388
30. Metoda momentów*	389
Zagadnienie momentu	392
Funkcje tworzące momenty	392
Centralne twierdzenie graniczne a momenty	392
Zastosowanie do teorii próbkowania	394
Zastosowanie do teorii liczb	395
Zadania	399
Rozdział 6. Pochodne i prawdopodobieństwo warunkowe	402
31. Pochodne na prostej*	402
Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego	402
Pochodne całek	404
Funkcje osobliwe	410
Całki pochodnych	414
Funkcje o wahaniu ograniczonym	417
Zadania	418
32. Twierdzenie Radona-Nikodyma	421
Addytywne funkcje zbioru	421
Rozkład Hahna	422
Absolutna ciągłość i osobliwość	423
Główne twierdzenie	424
Zadania	427
33. Prawdopodobieństwo warunkowe	428
Przypadek dyskretny	428

Przypadek ogólny	430
Własności prawdopodobieństwa warunkowego	437
Trudności i osobliwości	438
Rozkłady prawdopodobieństwa warunkowego	440
Zadania	442
34. Warunkowa wartość oczekiwana	446
Definicja	446
Własności warunkowej wartości oczekiwanej	447
Warunkowe rozkłady i wartości oczekiwane	451
Podciała dostateczne*	452
Estymacja o najmniejszej wariancji	455
Zadania	456
35. Martyngały	459
Definicja	459
Podmartyngały	463
Gry hazardowe	464
Funkcje martyngałów	466
Nierówności	467
Twierdzenia o zbieżności	469
Martyngały z czasem odwróconym	472
Zastosowania i pochodne	473
Ilorazy wiarygodności	475
Estymacja Bayesa	476
Prawo zero-jedynkowe	476
Mocne prawo wielkich liczb*	477
Twierdzenie Hewitta-Savage'a*	479
Wymienialne zmienne losowe*	480
Zadania	480

Rozdział 7. Procesy stochastyczne 485

36. Twierdzenie Kołmogorowa o istnieniu procesu	485
Procesy stochastyczne	485
Rozkłady skończenie wymiarowe	485
Przestrzenie produktowe	487
Twierdzenie Kołmogorowa o istnieniu procesu	489
Niedoskonałość σ -ciała R^T	494
Zadania	496
37. Ruch Browna	498
Definicja	498
Ciągłość trajektorii	500
Procesy mierzalne	504
Nieregularność trajektorii ruchu Browna	505
Mocna własność Markowa	510
Zanurzenie Skorochoda*	512
Niezmienniczość*	520
Zadania	522
38. Ośrodkowość*	525
Wstęp	525
Definicje	525
Twierdzenia o istnieniu	528

Konsekwencje ośrodkowości	532
Ośrodkowość w przestrzeniach produktowych	535
Uwagi do zadań	536
Dodatek do paragrafu 8. Łącuchy Markowa	570
Bibliografia	571
Wykaz oznaczeń	573
Skorowidz	574