

Spis treści

Co to jest matematyka? Czym zajmują się matematycy?	xv
Rzeczy wstępne: zasada indukcji i granice	1
1 Zasada indukcji, sumowanie potęg i średnie	2
1.1 Odkrywanie wzorów i zasada indukcji	2
1.2 Sumowanie potęg	6
1.3 Średnie i nierówności	9
2 Granica ciągu	12
2.1 Intuicje i rachunki	13
2.2 Trochę teorii i algorytm Herona	17
2.3 Koło, kula i liczba π	20
2.4 Archimedes	24
I Narzędzia: pochodna i całka	25
3 Pochodna	26
3.1 Pochodna i jej interpretacje	26
3.2 Podstawowe wzory	29
3.3 Kartezjusz i Fermat	32
4 Trochę teorii: ciągłość i twierdzenie Lagrange'a	33
4.1 Ciągłość	33
4.2 Twierdzenia Lagrange'a i jego konsekwencje	35
4.3 Lagrange	38

5	Pierwsze zastosowania	39
5.1	Monotoniczność i ekstrema	39
5.2	Zagadnienia optymalizacyjne i izoperymetria	42
6	Całka oznaczona	45
6.1	Nieformalne wprowadzenie	45
6.2	Definicja i własności całki oznaczonej	49
6.3	Riemann	52
7	Całka nieoznaczona i wzór Newtona-Leibniza	53
7.1	Całka nieoznaczona	53
7.2	Wzór Newtona-Leibniza	56
7.3	Newton i Leibniz	59
II	Kilka bardzo ważnych funkcji	61
8	Równania różniczkowe i funkcje przestępne	62
8.1	Eksponenta	63
8.2	Funkcje trygonometryczne	65
9	Logarytm naturalny i arcus tangens	69
9.1	Logarytm naturalny	69
9.2	Arcus tangens	71
10	Aproksymacje wielomianowe	74
10.1	Aproksymacje liniowe i wypukłość	75
10.2	Wzór Taylora i rozwinięcia Maclaurina	77
10.3	Dowód wzoru Taylora*	80
11	Reguły de l'Hôpitala i liczba e	83
11.1	Reguły de l'Hôpitala	83
11.2	Liczba e	86
11.3	Dwa dowody niewymierności	88
12	Techniki całkowania	90
12.1	Całkowanie przez podstawienie	90
12.2	Całkowanie przez części	94

13 Aproksymacje całkowe i wzór Stirlinga	97
13.1 Aproksymacja sumy harmonicznego i stała Eulera-Mascheroniego	97
13.2 Oszacowanie silni i wzór Stirlinga	99
III. Nieskończone sumy i zdumiewające równości	101
14 Szeregi liczbowe	102
14.1 Szereg geometryczny	102
14.2 Szereg harmonicznego i szeregi pokrewne	106
14.3 Iloczyn nieskończone i liczba π	108
15 Szeregi potęgowe	110
15.1 Rozwijanie funkcji w szereg Maclaurina	111
15.2 Operacje na szeregach	113
16 Trzy niezwykle równości	116
16.1 Wzór Mercatora i $\ln 2$	116
16.2 Wzór Leibniza i obliczanie π	118
16.3 Szalone rachunki Leonharda Eulera*	122
16.4 Euler	123
17 Liczby zespolone i funkcje przestępne	125
17.1 Liczby zespolone	125
17.2 Liczby zespolone i funkcje przestępne	128
17.3 Logarytm zespolony i wzór Leibniza	131
18 Szeregi Fouriera i ich zastosowania*	133
18.1 Szeregi Fouriera	133
18.2 Kwestie zbieżności	138
18.3 Fourier	143
Interludium I	144
IV Świat fizyczny, geometria i prawdopodobieństwo	145
19 Rozwój, zanik i oscylacje	146
19.1 Równanie rozpadu i jego warianty	146
19.2 Układy drgające*	151
19.3 Bernoulli	154

20 Torus i trąbka	156
20.1 Zasada Cavalieriego i objętość brył obrotowych	156
20.2 Pole powierzchni obrotowej i trąbka Torricellego	160
21 Matematyka i kartografia	162
21.1 Odwzorowanie walcowe Lamberta i twierdzenie Archimedesesa . .	162
21.2 Odwzorowanie Merkatora	164
22 Igła Buffona i wybór sekretarki	166
22.1 Prawdopodobieństwo geometryczne i igła Buffona	166
22.2 Problem sekretarki	169
23 Zmienna losowa, rozkład dwumianowy i błędzenie losowe	172
23.1 Zmienna losowa i jej rozkład	172
23.2 Miary rozproszenia i nierówność Czebyszewa	174
23.3 Rozkład dwumianowy i aproksymacja gaussowska	177
23.4 Błędzenie losowe	181
V Dyskretny urok arytmetyki wyższej	183
24 Euklides, Euklides, Euklides	184
24.1 Algorytm Euklidesa i jego konsekwencje	184
24.2 Twierdzenie Euklidesa i sito Eratostenesa	188
25 Kongruencje i ich zastosowania	191
25.1 Kongruencje	191
25.2 Dwa klasyczne twierdzenia: Wilsona i Fermata	194
25.3 Rozpoznawanie pierwszości: test Fermata	196
25.4 O tasowaniu kart	199
26 Funkcja Eulera i pierwiastki pierwotne	201
26.1 Funkcja Eulera i twierdzenie Eulera	201
26.2 Pierwiastki pierwotne i reszty kwadratowe	204
26.3 Liczby Fermata i twierdzenie Dirichleta	206
27 Protokoły kryptograficzne	208
27.1 Szyfry symetryczne i uzgadnianie klucza	209
27.2 RSA	211

28 Kilka pytań o liczby pierwsze	215
28.1 Hipoteza Goldbacha i jej warianty	215
28.2 Liczby bliźniacze i tematy pokrewne	217
28.3 Twierdzenie Czebyszewa i hipoteza Sierpińskiego	218
29 Rozmieszczenie liczb pierwszych	221
29.1 Zeta Riemanna i twierdzenie Eulera	221
29.2 Twierdzenie o rozmieszczeniu liczb pierwszych i hipoteza Riemanna	224
30 Twierdzenie Lagrange'a o sumie czterech kwadratów	227
30.1 Lemat Minkowskiego i twierdzenie Fermata-Eulera	228
30.2 Twierdzenia Lagrange'a	231
31 Sumy potęg i liczby wielokątne	234
31.1 Sumy potęg i twierdzenie Hilberta-Waringa	234
31.2 Liczby wielokątne i twierdzenie Cauchy'ego	236
31.3 Gauss	238
32 Równania diofantyczne	239
32.1 Równania Pitagorasa i Fermata	240
32.2 Równanie Pella i problem trzody Heliosa	244
32.3 Wiles	246
VI Między kombinatoryką, geometrią i algebrą	247
33 Grafy, drzewa i wzór Eulera	248
33.1 Ekspressem przez teorię grafów	248
33.2 Grafy planarne i wzór Eulera	251
34 Twierdzenie Picka i kolorowanie map	255
34.1 Twierdzenie Picka i wielokąty na kracie	255
34.2 Twierdzenie o czterech barwach i kolorowanie grafów	257
34.3 Dwa zadania o podziale	259
35 Wielokąty foremne i parkietaże	262
35.1 Wielokąty foremne	262
35.2 Parkietaże płaszczyzny	264
35.3 Upakowania na płaszczyźnie	266
35.4 Gardner i Escher	268

36	Wielościany, parkietaże i upakowania przestrzeni	269
36.1	Wielościany platońskie i archimedesowe	269
36.2	Parkietaże i upakowania w przestrzeni	273
37	Liczby zespolone i konstrukcje geometryczne	275
37.1	Postać trygonometryczna i wzór de Moivre'a	275
37.2	Konstrukcje wielokątów foremnych	279
37.3	Trzy klasyczne problemy konstrukcyjne	281
37.4	Euklides i jego <i>Elementy</i>	284
38	Przekroje i krzywe stożkowe	285
38.1	Przekroje wielościanów platońskich	285
38.2	Przekroje stożka i krzywe stożkowe	287
38.3	Krzywe stożkowe a równania algebraiczne	291
39	Czwarty wymiar i wyżej	294
39.1	Hipersześcian i inne wielokomórki	294
39.2	Osobliwości wyższych wymiarów	296
39.3	Poincaré	298
VII	Twierdzenia o istnieniu i gry matematyczne	299
40	Być albo nie być, czyli kwestie istnienia	300
40.1	Zasada szufladkowa	301
40.2	Kolorowanie, parzystość i polimina	303
40.3	Erdős	306
41	Punkty, proste i twierdzenie Sylwestera	307
41.1	Punkty i odległości	307
41.2	Proste twierdzenie o prostych	309
42	Twierdzenia ramseyowskie	311
42.1	Gra w trójkąty i liczby Ramsey'a	311
42.2	Twierdzenie van der Waerdena	314
43	Trzy gry Conwaya: kropki, krzyżyki i żołnierze	318
43.1	Kropki i krzyżyki	318
43.2	Żołnierze Conwaya	320
43.3	Conway	322

44 NIM i funkcja Grundy'ego	323
44.1 NIM	323
44.2 Funkcja Grundy'ego i NIM Wythoffa	327
44.3 Gry z niepełną informacją*	330
44.4 Von Neumann	334
Interludium II	335
VIII Nieskończoność, nieobliczalność i niezupełność	337
45 Przeliczalność, nieprzeliczalność i liczby przestępne	338
45.1 Zbiory przeliczalne i zbiory nieprzeliczalne	339
45.2 Liczby kardynalne i twierdzenie Cantora	341
45.3 O liczbach przestępnych	343
45.4 Cantor i Hilbert	345
46 Granice obliczalności i problem stopu	346
46.1 Obliczalność i rozstrzygalność	346
46.2 Funkcja Rado i problem stopu	350
46.3 Turing	353
47 Arytmetyka Peana i twierdzenie Gödla	354
47.1 Arytmetyka jako system formalny	355
47.2 Twierdzenie Gödla	357
47.3 Peano i Gödel	360
48 Teoria ZF, pewnik wyboru i hipoteza continuum	361
48.1 Aksjomaty teorii mnogości	361
48.2 Hipoteza continuum i jej uogólnienia	363
48.3 Sierpiński, Banach i Tarski	364
O polskiej szkole matematycznej	366
Odpowiedzi i wskazówki	368
Indeks	397