

Spis treści

Słowo wstępne	7
Wykaz symboli	9
1. Pojęcia wstępne	13
1.1. Przestrzeń topologiczna	13
1.2. Przestrzeń metryczna	15
1.3. Struktury algebraiczne	18
1.3.1. Działania	18
1.3.2. Półgrupa	18
1.3.3. Grupa	18
1.3.4. Pierścień	18
1.3.5. Ciało	19
1.3.6. Przestrzeń wektorowa	19
1.3.7. Algebra	20
1.3.8. Izomorfizm struktur algebraicznych	20
1.4. Przestrzeń liniowo-topologiczna	20
1.5. Pochodna słaba (uogólniona)	23
2. Przestrzeń Banacha	25
2.1. Przestrzeń unormowana i algebra unormowana	25
2.2. Szeregi w przestrzeniach unormowanych	30
2.3. Przykłady przestrzeni Banacha	32
2.3.1. Przestrzeń funkcji ciągłych na przedziale $[a, b]$	32
2.3.2. Przestrzeń ℓ_p	36
2.3.3. Przestrzeń L_p	41
2.4. Operacje liniowe w przestrzeniach Banacha	52
2.4.1. Odwzorowanie liniowe	52
2.4.2. Odwzorowanie liniowe ograniczone	55
2.4.3. Przykłady odwzorowań liniowych	61
2.5. Operatory liniowe w przestrzeni $B(X, Y)$	64
2.5.1. Twierdzenie Banacha–Steinhausa	66
2.5.2. Twierdzenie Banacha o odwzorowaniu otwartym	67
2.5.3. Twierdzenie Banacha o izomorfizmie	71
2.5.4. Twierdzenie Banacha o wykresie domkniętym	72
2.5.5. Twierdzenie o obrazie domkniętym	74

2.6.	Operatory domknięte	75
2.6.1.	Przykłady operatorów domkniętych	77
2.7.	Przestrzeń sprzężona	79
2.8.	Zbieżność w przestrzeni Banacha	80
2.9.	Twierdzenie o zanurzeniu przestrzeni unormowanej w przestrzeni Banacha	82
2.10.	Twierdzenie Banacha o rozszerzeniu odwzorowania jednostajnie ciągłego	87
2.11.	Twierdzenie Hahna–Banacha	89
2.12.	Algebra Banacha operatorów liniowych ograniczonych	94
2.13.	Rezolwenta i widmo operatora liniowego	96
2.13.1.	Wartości własne i wektory własne – przykłady	103
2.14.	Operatory zwarte w przestrzeni Banacha	106
3.	Przestrzeń Hilberta	119
3.1.	Iloczyn skalarny	119
3.2.	Wzór polaryzacyjny	123
3.3.	Rzut prostopadły – część 1	127
3.4.	Szeregi ortogonalne	134
3.5.	Funkcjonały w przestrzeni Hilberta	143
3.6.	Operatory sprzężone w przestrzeni Hilberta	150
3.6.1.	Przykład operatora sprzężonego	152
3.6.2.	Własności operatorów sprzężonych	153
3.6.3.	Dekompozycja (rozkład) przestrzeni Hilberta	160
3.7.	Klasyfikacja operatorów w przestrzeni Hilberta	160
3.7.1.	Operator normalny	161
3.7.2.	Podprzestrzeń niezmiennicza i redukująca	166
3.7.3.	Operator unitarny	170
3.7.4.	Operator symetryczny i samosprężony	172
3.7.5.	Przykłady operatorów symetrycznych i samosprężonych	173
3.8.	Rzut prostopadły – część 2	176
3.8.1.	Własności rzutu prostopadłego	176
3.9.	Twierdzenie spektralne	178
Literatura		183