

Spis treści

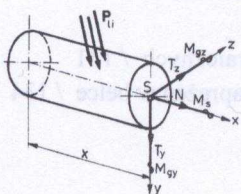
Wstęp

15

1

Modelowanie w wytrzymałości materiałów

17



1.1. Charakterystyka modeli i problematyka wytrzymałości materiałów / 17

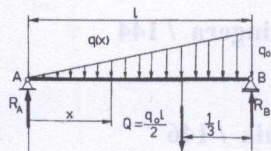
1.2. Momenty bezwładności i zboczenia przekroju pręta / 22

1.3. Siły wewnętrzne i naprężenia w przęcie / 33

2

Wytrzymałość prętów

49



2.1. Rodzaje elementarnych przypadków wytrzymałości pręta / 49

2.2. Pręt rozciągany lub ściskany / 50

2.3. Pręt skręcany o przekroju kołowym / 54

2.4. Zginanie proste równomierne belki / 60

2.4.1. Rozkład naprężeń w przekroju belki / 60

2.4.2. Równania osi ugiętej belki / 67

2.5. Pręt ścinany / 79

2.6. Kryteria wytrzymałości i sztywności pręta / 83

3

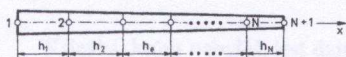
Metoda elementów skończonych dla pręta

105

3.1. Wstęp / 105

3.2. Metoda elementów skończonych dla pręta rozciąganego i skręcanego / 106

- 3.2.1. Dyskretyzacja pręta / 106
- 3.2.2. Równania opisujące typowy element skończony pręta / 108
- 3.2.3. Agregacja elementów skończonych pręta / 115
- 3.2.4. Uwzględnienie warunków brzegowych i rozwiązanie układu równań algebraicznych / 118
- 3.2.5. Obliczanie odkształceń, sił normalnych i naprężeń / 120



3.3. Metoda elementów skończonych dla prętów zginanych (belek) / 122

- 3.3.1. Dyskretyzacja obszaru belki / 122
- 3.3.2. Równania opisujące typowy element skończony belki / 123
- 3.3.3. Agregacja elementów skończonych belki / 128
- 3.3.4. Uwzględnienie warunków brzegowych i rozwiązanie równań algebraicznych / 131
- 3.3.5. Obliczanie ugięć, momentów gnących i naprężeń w belce / 134

4

Badania wytrzymałościowe tworzyw

137

4.1. Pomiar odkształceń / 137

4.2. Rodzaje tworzyw konstrukcyjnych / 138

4.3. Wykresy rozciągania stopów metali / 139

4.4. Pętla histerezy sprężystej, efekt Bauschingera / 144

4.5. Rzeczywisty wykres rozciągania / 145

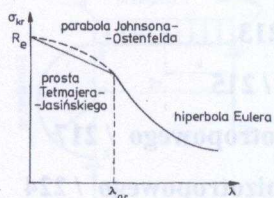
4.6. Modele uproszczone wykresu rozciągania / 146

4.7. Fizyczne aspekty odkształcalności i wytrzymałości ciał polikrystalicznych / 147



5 Stateczność pręta

151



5.1. Wyboczenie pręta / 151

5.2. Metoda energetyczna wyznaczania siły krytycznej dla wyboczenia sprężystego / 159

5.3. Stateczność belki zginanej o wąskim przekroju prostokątnym / 163

6 Stan naprężenia i odkształcenia

167

6.1. Teoria stanu naprężenia / 167

6.1.1. Definicja stanu naprężenia / 167

6.1.2. Tensor stanu naprężenia / 171

6.1.3. Równania wewnętrznej równowagi lokalnej / 174

6.2. Teoria stanu odkształcenia / 179

6.2.1. Wektor przemieszczenia / 179

6.2.2. Stan odkształcenia. Związki geometryczne / 180

6.2.3. Odkształcenia skończone / 188

6.3. Transformacja i rodzaje stanu naprężenia i odkształcenia / 192

6.3.1. Prawa transformacji tensora stanu naprężenia i odkształcenia / 192

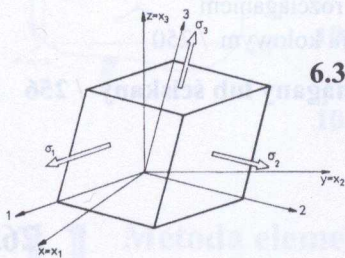
6.3.2. Naprężenia i odkształcenia główne / 196

6.3.3. Aksjator i dewiator stanu naprężenia i odkształcenia / 200

6.3.4. Płaski i jednoosiowy stan naprężenia i odkształcenia / 202

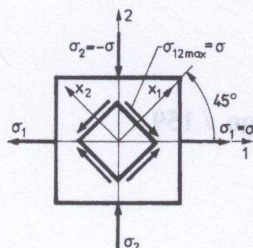
6.3.5. Maksymalne naprężenie styczne i odkształcenie poprzeczne / 210

6.3.6. Oznaczenia inżynierskie naprężeń, odkształceń i przemieszczeń / 211



7 Sprężystość liniowa

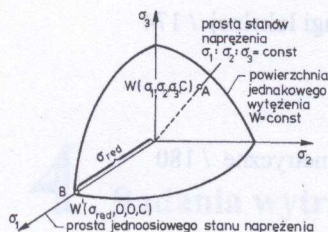
213



- 7.1. Układ liniowosprężysty Clapeyrona / 213
- 7.2. Energia sprężysta układu Clapeyrona / 215
- 7.3. Uogólnione prawo Hooke'a dla ciała izotropowego / 217
- 7.4. Uogólnione prawo Hooke'a dla ciała anizotropowego / 224
- 7.5. Energia sprężysta właściwa / 226

8 Wyężenie oraz złożone przypadki wytrzymałości pręta

229

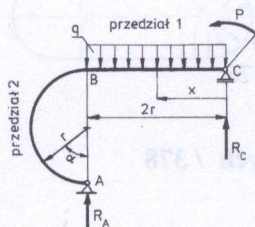


- 8.1. Hipotezy wyężenia / 229
- 8.2. Złożone przypadki wytrzymałości pręta prostego / 239
 - 8.2.1. Superpozycja elementarnych przypadków wytrzymałości pręta / 239
 - 8.2.2. Zginanie wraz z rozciąganiem lub ściskaniem pręta / 239
 - 8.2.3. Zginanie ukośne pręta / 249
 - 8.2.4. Skręcanie wraz ze zginaniem i rozciąganiem lub ściskaniem pręta o przekroju kołowym / 250
- 8.3. Pręt krzywy płaski zginany i rozciągany lub ściskany / 256

9 Wytrzymałość układów prętowych

263

- 9.1. Klasyfikacja liniowosprężystych układów prętowych / 263
- 9.2. Energia sprężysta układu prętowego / 263
- 9.3. Metody energetyczne wyznaczania przemieszczeń / 271



- 9.3.1. Twierdzenie Castigliana / 271
- 9.3.2. Metoda Maxwella-Mohra / 279

9.4. Statycznie niewyznaczalne układy prętowe / 286

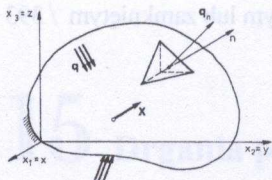
- 9.4.1. Elementarne sposoby rozwiązywania zadań statycznie niewyznaczalnych / 286
- 9.4.2. Metoda sił / 290
- 9.4.3. Zasada minimum energii sprężystej Menabrei-Castigliana / 307

9.5. Metoda elementów skończonych dla układów prętowych / 310

- 9.5.1. Metoda elementów skończonych dla kratownic / 310
- 9.5.2. Metoda elementów skończonych dla ram / 316

10 Podstawy liniowej teorii sprężystości

325



10.1. Przestrzenne zadanie brzegowe teorii sprężystości / 325

10.2. Metody rozwiązywania zadań brzegowych teorii sprężystości / 330

10.3. Rozwiązanie płaskiego zadania brzegowego teorii sprężystości w naprężeniach / 334

10.4. Rozwiązanie płaskiego osiowosymetrycznego zadania brzegowego teorii sprężystości w przemieszczeniach / 342

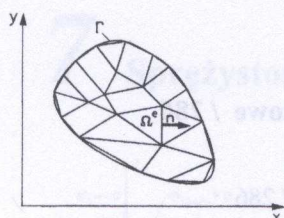
10.5. Naprężenia kontaktowe / 351

11 Metoda elementów skończonych dla zagadnień brzegowych teorii sprężystości

357

11.1. Zagadnienia dwuwymiarowe / 357

- 11.1.1. Sformułowanie zagadnienia brzegowego dla zagadnień dwuwymiarowych / 357

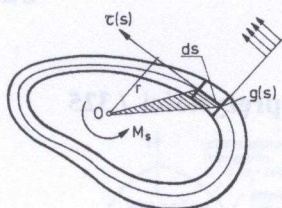


- 11.1.2. Sformułowanie słabe dla zagadnienia brzegowego teorii sprężystości / 360
- 11.1.3. Równania metody elementów skończonych / 365
- 11.1.4. Funkcje interpolacyjne / 369
- 11.1.5. Macierzowa postać równań MES / 374
- 11.1.6. Agregacja elementów skończonych / 376

11.2. Metoda elementów skończonych dla zagadnień przestrzennych / 378

12 Skręcanie swobodne prętów o dowolnym przekroju

383



12.1. Podstawy teorii de Saint-Venanta skręcania swobodnego pręta / 383

12.2. Analogia błonowa Prandtla / 387

12.3. Przykłady skręcania swobodnego pręta / 390

- 12.3.1. Pręt o przekroju eliptycznym / 390
- 12.3.2. Pręt o przekroju prostokątnym / 392
- 12.3.3. Pręty cienkościenne o przekroju otwartym lub zamkniętym / 393

12.4. Metoda elementów skończonych dla skręcania swobodnego pręta / 401

13 Płyty i powłoki

407

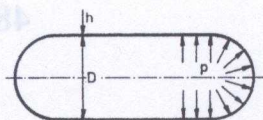
13.1. Założenia teorii zginania płyt cienkich / 407

13.2. Siły wewnętrzne i naprężenia w płycie / 408

13.3. Równania równowagi elementu płyty / 412

13.4. Równanie różniczkowe powierzchni ugiętej płyty / 414

13.5. Zagadnienia brzegowe dla płyt / 415



13.6. Płyty kołowe cienkie osiowosymetryczne / 422

13.7. Błonowa teoria powłok osiowosymetrycznych / 429

13.8. Zgięciowa teoria cienkiej powłoki walcowej / 433

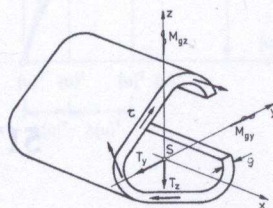
13.9. Metoda elementów skończonych dla płyt i powłok / 439

13.9.1. Metoda elementów skończonych dla płyt / 439

13.9.2. Metoda elementów skończonych dla powłok / 445

14 Pręty cienkościenne

449



14.1. Uwagi wstępne o modelu pręta cienkościenne / 449

14.2. Zginanie nierównomierne pręta
cienkościenne o przekroju otwartym / 451

14.3. Skręcanie nieswobodne pręta
cienkościenne o przekroju otwartym / 458

14.4. Przypadek ogólny obciążenia pręta
cienkościenne o przekroju otwartym / 462

15 Drgania prętów liniowosprężystych

465

15.1. Wytrzymałościowe aspekty drgań pręta nieważkiego / 465

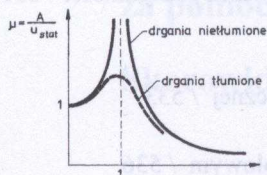
15.2. Rodzaje drgań sprężystych
pręta o masie rozłożonej ciągle / 468

15.3. Równanie drgań podłużnych pręta / 470

15.4. Równanie drgań skrętnych pręta / 472

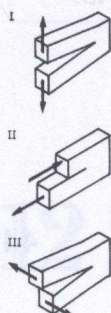
15.5. Równanie drgań giętnych pręta / 474

15.6. Metoda elementów
skończonych w analizie drgań pręta / 476



16 Pękanie i zmęczenie materiału

485



16.1. Elementy mechaniki pękania / 485

16.2. Zmęczenie materiału / 492

- 16.2.1. Podstawowe pojęcia i badania fenomenologiczne zmęczenia materiału / 492
- 16.2.2. Niskocyklowa wytrzymałość zmęczeniowa / 500
- 16.2.3. Klasyczne kryteria wysokocyklowej wytrzymałości zmęczeniowej / 502
- 16.2.4. Kumulacja uszkodzeń zmęczeniowych / 511
- 16.2.5. Prawdopodobieństwo zniszczenia zmęczeniowego / 512
- 16.2.6. Prędkość rozwoju pęknięcia zmęczeniowego / 514

17 Plastyczność i pełzanie

517

17.1. Rodzaje zagadnień nieliniowych w mechanice ciała odkształcalnego / 517

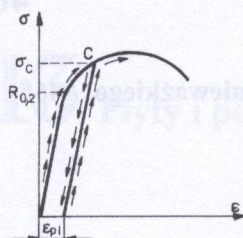
17.2. Podstawy teorii płynięcia plastycznego / 519

- 17.2.1. Dwie koncepcje teorii plastyczności / 519
- 17.2.2. Intensywność naprężenia i odkształcenia / 519
- 17.2.3. Powierzchnie plastyczności / 521
- 17.2.4. Postulat Druckera / 526
- 17.2.5. Stowarzyszone prawo płynięcia / 528
- 17.2.6. Równania konstytutywne przyrostowej teorii plastyczności / 531

17.3. Pręty sprężysto-plastyczne / 533

- 17.3.1. Zginanie proste belki sprężysto-plastycznej / 533
- 17.3.2. Skręcanie pręta sprężysto-plastycznego o przekroju kołowym / 536
- 17.3.3. Nośność (udźwig) pręta sprężysto-plastycznego / 537

17.4. Elementarne zagadnienia reologii / 545

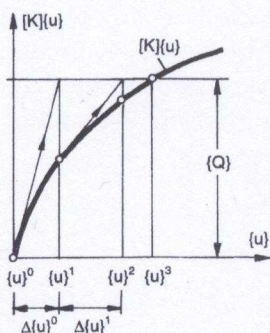


17.5. Uwagi o odkształcalności
i wytrzymałości tworzyw sztucznych / 550

17.6. Uwagi o odkształcalności i wytrzymałości kompozytów / 554

18 Metoda elementów skończonych w zagadnieniach nieliniowych

559



18.1. Metody rozwiązywania
diskretnych układów nieliniowych / 559

18.1.1. Metoda iteracji bezpośredniej / 559

18.1.2. Metoda Newtona-Raphsona / 561

18.1.3. Metody przyrostowe / 562

18.2. Metoda początkowych naprężeń
i odkształceń dla nieliniowej sprężystości / 565

18.3. Metoda elementów skończonych
w zagadnieniach teorii plastyczności / 568

Literatura

573

Zestawienie programów komputerowych
metody elementów skończonych dostępnych
pod adresem <http://www.mes.polsl.gliwice.pl>

575

Przykłady komputerowej analizy wytrzymałościowej
za pomocą metody elementów skończonych

576

Skorowidz

577