

Table des matières

TOME 1

INTRODUCTION. ORIGINALITÉ DE LA LOGIQUE MODERNE	1
---	---

PREMIÈRE PARTIE

LES CLASSES

CHAPITRE 1. LOGIQUE DES CLASSES	15
<i>Section 1. Classe, ensemble et prédicat</i>	15
A. <i>Classe, ensemble et prédicat</i>	15
1. Logique et mathématique	15
2. Classe et prédicat	16
B. <i>Egalité et inclusion des classes</i>	17
1. Egalité des classes	17
2. Inclusion des classes	18
3. Egalité et inclusion	18
4. Inclusion et appartenance	18
C. <i>Propriétés de l'égalité, de l'inclusion et de l'appartenance</i>	19
1. Propriétés de la relation d'égalité entre deux classes α et β	19
2. Propriétés de la relation d'inclusion $\subseteq$	19
3. Propriétés de la relation d'appartenance	20
<i>Section 2. Le calcul des classes</i>	20
A. <i>La réunion</i>	21
1. Définition	21
2. Propriétés de la réunion	22
3. Réunion et inclusion	22
B. <i>L'intersection</i>	22
1. Définition	22

2. Propriétés de l'intersection	23
3. La classe vide	23
4. Intersection et inclusion	23
5. Intersection et réunion	23
C. <i>La complémentation</i>	24
1. Définition	24
2. Propriétés de la complémentation	24
3. Complémentation et inclusion	24
4. Complémentation et réunion exclusive	25
5. Univers du discours et complément	25
D. <i>Les propriétés de $\emptyset$ et de $\mathcal{U}$</i>	25
1. Nouvelle définition de la classe vide	25
2. Intersection et classe vide	25
3. Inclusion et classe vide	26
4. Relations de l'Univers du discours et de la classe vide	26
CHAPITRE II. FORMALISATION DE LA LOGIQUE DES CLASSES	27
<i>Section 1. Axiomatisation, formalisation et propriétés des systèmes formels</i>	27
A. <i>L'axiomatisation</i>	28
1. L'axiomatisation au sens classique	28
2. L'axiomatisation au sens moderne	30
B. <i>La formalisation</i>	30
1. Notion de système formel	30
2. Construction d'un système formel	31
3. Syntaxe et sémantique	32
C. <i>Propriétés des systèmes formels</i>	33
1. Effectivité	33
2. Consistance	34
3. Complétude	35
4. Saturation	35
5. Décidabilité	35
6. Indépendance	35
7. Force	36
8. Consistance relative	36
<i>Section 2. Formalisation du calcul des classes</i>	36
1. Les signes, éléments de l'alphabet	36
2. Les termes ou mots	37
3. Les formules ou expressions bien formées (<i>ebf</i>)	38
4. Les axiomes	38
5. Les règles de conséquence immédiate	38
6. Dédution et théorème	39
7. Interprétation du calcul des classes	40

DEUXIÈME PARTIE

LES PROPOSITIONS

CHAPITRE III. LOGIQUE DES PROPOSITIONS 45

 Section 1. Logique des propositions et évaluation des propositions composées 45

 A. Propositions simples et propositions composées 46

 1. Définition du calcul des propositions 46

 2. Propositions simples ou atomiques 46

 3. Propositions composées 46

 B. Evaluation des propositions composées par les tables de vérité 47

 1. La table de vérité du OU non exclusif (le *vel* latin) ou disjonction 47

 2. La table de vérité du OU exclusif (le *aut* latin) ou alternative 48

 3. La table de vérité du ET ou conjonction 48

 4. La table de vérité du NON ou négation 49

 5. La table de vérité du SI... ALORS ou conditionnel 49

 6. Les différentes notations des symboles 50

 7. Evaluation des propositions composées par les tables de vérité 52

 C. Vérification des arguments par les tables de vérité 54

 1. Définition 54

 2. Exemples 54

 D. Relations entre deux propositions 56

 1. Propositions sans relation 57

 2. Relations simples entre les propositions 57

 3. Relations doubles entre les propositions 57

 Section 2. Equivalence des formules et tautologie 58

 A. Biconditionnel, équivalence et tautologie 58

 1. L'opérateur biconditionnel 58

 2. L'équivalence des formules 59

 3. La tautologie 60

 4. Les différentes expressions bien formées 62

 B. Les 16 opérateurs binaires 63

 1. Le tableau des 16 opérateurs binaires 63

 2. L'équivalence des opérateurs 65

 3. Etablir une formule ayant une évaluation donnée 65

 4. Trois équivalences utiles 66

 5. Autres équivalences utiles 67

 Section 3. Le problème de la décision et les formes normales 68

 A. Notation des sommes et des produits logiques et de leurs propriétés 68

 1. Somme logique 68

 2. Produit logique 69

 3. Principe de dualité 69

4. Distributivité de la conjonction et de la disjonction	71
B. <i>Les formes normales</i>	72
1. Forme normale disjonctive	72
2. Forme normale conjonctive	73
3. Problème de la décision	74
4. Forme normale disjonctive parfaite	74
5. Forme normale conjonctive parfaite	75
6. Equivalence des formules	76
C. <i>Quelques lois importantes du calcul des propositions</i>	77
Section 4. L'isomorphisme des classes et des propositions	79
A. <i>Analogies des classes et des propositions</i>	79
1. Classes, propositions et opérateurs	79
2. Analogies entre les relations et les règles	81
B. <i>Logique et ensembles</i>	81
1. La conjonction	82
2. La disjonction	82
3. La négation	82
4. Le conditionnel	83
5. Le biconditionnel	84
6. Remarques	84
C. <i>Limites de l'isomorphisme des classes et des propositions</i>	85
1. Le calcul des classes dépasse celui des propositions	85
2. Le calcul des propositions domine le calcul des classes	85
3. Limites de la logique des propositions	86
CHAPITRE IV. FORMALISATION DE LA LOGIQUE DES PROPOSITIONS	88
Section 1. La formalisation du calcul des propositions	88
A. <i>Symboles et formules</i>	89
1. Les symboles ou signes primitifs	89
2. Les formules ou expressions bien formées (<i>ebf</i>)	90
B. <i>Les axiomes de Russell</i>	91
1. Les cinq axiomes de Whitehead et Russell (1910)	92
2. Les quatre axiomes de Hilbert-Ackermann (1928)	92
3. Les règles	93
4. Les définitions et les règles dérivées	93
5. Démonstration de quelques théorèmes	94
C. <i>Les trois axiomes de Łukasiewicz (1930)</i>	97
1. Énoncé des axiomes	97
2. Les règles	97

3. Les définitions abrégées	97
4. Les théorèmes	98
D. Les onze axiomes de Novikov	99
1. Axiomes du calcul des propositions	99
2. Les règles	100
3. La formule abrégée	101
4. Quelques théorèmes utiles	102
5. Les treize axiomes de Kleene-Gentzen (1934-35)	102
Section 2. La déduction et l'équivalence	103
A. Théorème de déduction	103
1. Définition de la déduction	103
2. Le théorème de déduction	104
3. Exemple d'application	108
B. Théorèmes et règles du calcul des propositions	108
1. Règle du syllogisme ou de la transitivité	109
2. Règle de permutation des prémisses	109
3. Règle de symétrie	110
4. Théorème <i>Ex falso sequitur quodlibet</i>	111
5. Règle de réunion des prémisses	112
6. Principe de non-contradiction	113
C. Equivalence des formules et théorèmes sur l'équivalence	114
1. Equivalence des formules	114
2. Démonstration de l'équivalence de deux formules	114
3. Théorème d'équivalence	115
4. Quelques théorèmes sur l'équivalence	116
Section 3. Interprétation et propriétés du calcul des propositions	119
1. Algèbre des propositions et calcul des propositions	120
2. Non-contradiction du calcul des propositions	123
3. Complétude du calcul des propositions	124
4. Indépendance des axiomes du calcul des propositions	127
CHAPITRE V. LA DÉDUCTION NATURELLE DES PROPOSITIONS	135
Section unique	135
1. Généralités	135
2. Les symboles ou signes primitifs	136
3. Les formules ou expressions bien formées	137
4. Le schéma d'axiomes	138
5. Les règles ou schémas de dérivation	138
6. Démonstration de quelques théorèmes	141
7. Avantages de la méthode de déduction naturelle	144

TROISIÈME PARTIE

LES PRÉDICATS

CHAPITRE VI. LOGIQUE DES PRÉDICATS.....	149
<i>Section 1. Structure des propositions</i>	149
A. <i>Structure élémentaire des propositions</i>	150
1. Le point de vue de la logique classique	150
2. Le point de vue de la logique moderne	151
B. <i>Structure des propositions avec quantificateurs</i>	154
1. Le point de vue de la logique classique	154
2. Le point de vue de la logique moderne	155
3. Les opérateurs de la logique des prédicats	158
<i>Section 2. Quantification des propositions et propriétés des quantificateurs</i>	158
A. <i>Quantification des propositions</i>	158
1. Propositions simples	159
2. Propositions composées	160
B. <i>Propriétés des quantificateurs</i>	160
1. Variables libres et variables liées	160
2. Quantificateurs et domaines de définition	162
3. Principales propriétés des quantificateurs	164
4. Propriétés des propositions quantifiées d'ordre deux	167
5. Quelques procédés mnémotechniques	172
<i>Section 3. Vers la formalisation des prédicats</i>	173
A. <i>Prédicats et ensembles</i>	174
1. Prédicat, classe et ensemble	174
2. Définitions relatives aux fonctions propositionnelles d'une variable	175
3. Quelques définitions relatives aux formules	176
B. <i>Abstracteurs, généralisateurs et quantificateurs</i>	178
1. Les abstracteurs	178
2. Les généralisateurs	180
3. Les quantificateurs	181
C. <i>Formes normales</i>	181
1. Forme réduite	181
2. Forme normale	182

D. Limites de la logique des prédicats	185
1. Prédicats d'une variable	185
2. Domaines finis et domaines infinis	187
3. Théorème de Löwenheim	188
CHAPITRE VII. FORMALISATION DE LA LOGIQUE DES PRÉ- DICATS	191
Section 1. Axiomatisation de la logique des prédicats	191
A. Les systèmes d'axiomes	192
1. L'alphabet	192
2. Les formules	193
3. Les axiomes de Hilbert-Ackermann	194
4. Les axiomes de Lukasiewicz	195
5. Les axiomes de Novikov	195
B. Les cinq règles de formation des formules vraies	196
1. Règle de conclusion	196
2. Règle de substitution des propositions et des fonctions pré- dicatives	196
3. Règle de substitution d'une variable d'objet libre	198
4. Règle du changement de nom des variables d'objet liées	199
5. Règles de liaison par quantificateur	200
6. Remarques	200
Section 2. Théorèmes du calcul des prédicats	201
A. Le théorème de déduction	201
1. Formules vraies ou déduites dans le calcul des prédicats	201
2. Déduction dans le calcul des prédicats	203
3. Théorème de déduction	204
B. Théorèmes du calcul des prédicats	206
1. Théorème 1 : Existentialisation des propositions universelles ..	206
2. Théorème 2 : Commutativité des quantificateurs universels ..	207
3. Théorème 3 : Subordination des existentielles universalisées aux universelles existentialisées	207
4. Théorème 4 : Semi-distributivité du quantificateur universel (formule [43] du tableau VI.2)	208
5. Théorème 5 : Semi-distributivité du quantificateur universel (formule [46] du tableau VI.2)	209
6. Théorème 6 : Semi-distributivité du quantificateur universel (formule [52] du tableau VI.2)	210
7. Théorème 7 : Semi-distributivité du quantificateur universel (formule [54] du tableau VI.2)	211
8. Théorème 8 : Négation des quantificateurs	212
9. Théorème 9 : Distributivité du quantificateur universel (for- mule [45] du tableau VI.2)	213

C. <i>Equivalence et dualité des formules</i>	215
1. Définition des formules équivalentes	215
2. Théorème d'équivalence et règle de remplacement	215
3. Formules réduites	217
4. Formules duales	217
Section 3. Les formes normales du calcul des prédicats	218
A. <i>Les formes normales</i>	219
1. Rappel de la définition	219
2. Théorèmes	219
3. Existence des formes normales	221
B. <i>L'équivalence déductive et les formes normales de Skolem</i>	221
1. L'équivalence déductive	221
2. Le théorème de Skolem	222
3. Lemmes préparatoires	223
4. Démonstration du théorème de Skolem	227
Section 4. Les propriétés du calcul des prédicats	229
A. <i>Non-contradiction du calcul des prédicats</i>	229
1. Notion de formule associée	229
2. Démonstration générale	229
3. Démonstration formelle	230
B. <i>Complétude au sens fort ou étroit</i>	232
1. Adjonction d'une formule non démontrable	232
2. Éléments de démonstration	233
C. <i>Complétude au sens faible ou large</i>	235
D. <i>Métalogique des prédicats</i>	235
1. Logique du premier ordre et logiques d'ordre supérieur	236
2. Non-contradiction et décidabilité du calcul des prédicats du premier ordre	236
3. Les théorèmes de Gödel	237
Section 5. La déduction naturelle des prédicats	238
1. Axiomes et règles de la déduction naturelle	238
2. Théorèmes	239
ANNEXE I. Table de correspondance des différents symboles employés dans les traités de logique	243
ANNEXE II. Quelques systèmes d'axiomes pour la logique des propositions	244
EXERCICES	
1. <i>Enoncés des exercices</i>	253
2. <i>Corrigés des exercices</i>	262

TOME 2

QUATRIÈME PARTIE

APERÇUS SUR LES LOGIQUES NON CLASSIQUES

CHAPITRE VIII. LOGIQUES PLURIVALENTES.....	297
Section 1. La logique trivalente de Lukasiewicz	298
1. Tables de vérité des cinq opérateurs fondamentaux	299
2. Les axiomes.....	302
3. Calcul trivalent et calcul classique	303
4. Intérêt du calcul trivalent	304
Section 2. Autres exemples de logiques plurivalentes	304
A. Les calculs standard	304
B. La logique probabilitaire	306
1. Lois de Lukasiewicz	306
2. Logique probabilitaire	306
3. Logique plurivalente et calcul des probabilités.....	308
CHAPITRE IX. LOGIQUES MODALES	311
Section 1. Les modalités et leur expression formelle.....	311
A. Notion de modalité et opérateurs modaux	311
1. Définition de la modalité	311
2. Précisions sur le vocabulaire	312
3. L'expression des modalités	313
4. Les opérateurs modaux	314
5. L'interprétation des opérateurs modaux	316
B. L'implication stricte de Lewis	318
1. L'implication matérielle.....	318
2. Les paradoxes de l'implication	319
3. Définition de l'implication stricte	319
4. Les difficultés du système de Lewis	320
Section 2. Les systèmes modaux	321
A. Les systèmes modaux $\mathcal{S}$	322
1. Le système $\mathcal{S}_1$	322
2. Le système $\mathcal{S}_2$	323
3. Le système $\mathcal{S}_3$	323
4. Le système $\mathcal{S}_4$	323
5. Le système $\mathcal{S}_5$	324
6. Les systèmes $\mathcal{S}_6$, $\mathcal{S}_7$ et $\mathcal{S}_8$	324

B. <i>Le système modal $\mathcal{G}$</i>	325
1. Formalisation de $\mathcal{G}$	325
2. Note sur la compatibilité	328
3. Un calcul modal des prédicats	329
4. Difficultés générales de la logique modale	330
5. Les systèmes modaux au sens large	331
 CHAPITRE X. LES LOGIQUES AFFAIBLIES	333
<i>Section unique</i>	333
A. <i>La négation et ses interprétations</i>	333
B. <i>Quelques logiques à faible nombre d'axiomes</i>	335
1. La logique intuitionniste $\mathcal{J}$ de Heyting	336
2. La logique de la négation stricte $\mathcal{N}$ de Curry	341
3. La logique minimale $\mathcal{M}$ de Johansson	342
4. La logique positive $\mathcal{P}$	342
5. La logique absolue $\mathcal{A}$	342
6. Vue d'ensemble sur les logiques affaiblies	342
C. <i>Les systèmes partiels</i>	343
1. Définition	343
2. Le calcul implicationnel	343
3. Le calcul équivalentiel	344

CINQUIÈME PARTIE

LES RELATIONS, L'IDENTITÉ ET L'ABSTRACTION

CHAPITRE XI. LA LOGIQUE DES RELATIONS	347
<i>Section 1. Définition et propriétés des relations</i>	347
A. <i>Définitions et notations</i>	348
1. Les relations	348
2. Domaine d'une relation	349
3. Codomaine d'une relation	349
4. Champ et extension d'une relation	349
5. Domaine de définition et classe associée	350
6. Représentation matricielle	351
B. <i>Propriétés formelles des relations binaires</i>	351
1. La symétrie et les relations qui en dépendent	351
2. La transitivité et les relations qui en dépendent	354
3. La réflexivité et les relations qui en dépendent	356
4. Rapports entre ces relations	357

5. Propriétés définies à partir du domaine et du codomaine des relations	357
Section 2. Etude de quelques relations	361
A. <i>Quelques relations importantes</i>	361
1. Les relations d'équivalence	361
2. Les relations connexes	362
3. Les relations denses	363
4. Les relations d'ordre	363
B. <i>Opérations sur les relations</i>	364
1. Opérations analogues à celles du calcul des propositions	364
2. La conversion ou inversion	365
3. La conjonction relative ou produit relatif	365
C. <i>Règles de syntaxe</i>	367
1. Abstraites de relation	367
2. Lois logiques des relations	368
3. Importance de la logique des relations	369
CHAPITRE XII. L'EXPRESSION MODERNE DES SYLLOGISMES..	370
Section 1. Ecriture des propositions composées en logique classique et en logique moderne.	370
1. Critiques des logiciens modernes	371
2. Réponse aux critiques	373
3. Traduction des propositions universelles et particulières... ..	375
Section 2. La méthode de Lukasiewicz	377
1. Rappels sur les syllogismes	378
2. Notation des relations	379
3. Les quatre modes concluants de la première figure	379
4. Les quatre modes concluants de la deuxième figure	380
5. Les six modes concluants de la troisième figure	383
6. Les cinq modes concluants de la quatrième figure	384
7. Le système de Lukasiewicz	385
Section 3. La méthode de Dopp et ses applications.	386
1. Principe de la méthode	386
2. Les inférences immédiates	387
3. Arguments et tautologies	390
4. Les quatre modes concluants de la première figure	390
5. Les quatre modes concluants de la deuxième figure	391
6. Les six modes concluants de la troisième figure	392
7. Les cinq modes concluants de la quatrième figure	392
8. Réduction des modes	393

CHAPITRE XIII. LA LOGIQUE DE L'IDENTITÉ 396

 Section 1. Calcul des prédicats avec identité 397

 1. Les symboles 398

 2. Les propriétés de l'identité 398

 3. Les expressions bien formées 399

 4. Les axiomes 399

 5. Les propriétés du prédicat d'égalité 399

 6. Les lois logiques de l'identité 400

 Section 2. Définition des propriétés des relations à l'aide de l'identité ... 401

 1. Nouvelle expression de propriétés déjà connues 401

 2. Nouvelle propriété des relations 401

 3. L'isomorphisme ou identité de structures 402

 Section 3. Les descriptions d'objets 403

 1. Les descriptions d'objets 403

 2. Utilisation du symbole ι 405

 3. Avantages de l'opérateur ι 405

 4. Limites de l'opérateur ι 407

CHAPITRE XIV. L'ABSTRACTION ET LE RETOUR AUX CLASSES 408

 Section 1. Définition des classes à partir des fonctions propositionnelles 408

 1. Définition des classes à partir des prédicats 408

 2. L'axiome d'extensionnalité 409

 3. Le principe d'abstraction 410

 Section 2. Le calcul des classes et l'antinomie de Russell 411

 A. Le calcul des classes 411

 1. Définitions 412

 2. Opérations sur les classes 412

 3. Axiomes et propriétés du calcul 412

 4. Les relations entre classes 414

 B. L'antinomie de Russell 416

 1. Dédution de Russell 416

 2. La théorie de la hiérarchie des types logiques 418

SIXIÈME PARTIE

STRUCTURES LOGIQUES

CHAPITRE XV. LA LOGIQUE ET LES STRUCTURES 423

Section 1. La logique et les structures algébriques 423A. *L'algèbre de Boole* 424

1. Le quintuple $[E, \cup, \cap, -, =]$ 424
2. Logique des classes et algèbre de Boole 425
3. Calcul $\mathcal{C}$ des propositions et algèbre de Boole 425
4. La dualité 426
5. Interprétation de l'algèbre de Boole 428

B. *La structure de lattice* 429

1. Définition de la structure de lattice 430
2. Propriétés 431
3. Lattice de Boole 434
4. Interprétation de la structure de lattice 435

C. *La structure de groupe* 436

1. Définition de la structure de groupe 436
2. Élément inverse 437
3. Classes, propositions et structures de groupe 438

D. *La structure d'anneau* 440

1. Définition de la structure d'anneau 440
2. Logique des propositions et structure d'anneau 440
3. Structures fondamentales de la logique 442

Section 2. Les groupements et le groupe INRC 443A. *La structure de groupement* 444

1. Intérêt de cette structure 444
2. Formalisation de la structure de groupement 444
3. Importance de la structure de groupement 445
4. Notion de transformation logique 446

B. *Le groupe INRC de Piaget* 447

1. Rappel des seize opérations binaires 447
2. Les transformations INRC 447
3. Le groupe INRC 449
4. Retour à l'ensemble E des seize opérations binaires 450
5. Généralisation des transformations INRC 451

ANNEXE I.	Table de correspondance des différents symboles employés dans les traités de logique	455
ANNEXE II.	Quelques systèmes d'axiomes pour la logique des propositions	456
ANNEXE III.	Liste des ouvrages cités	465
EXERCICES		
1.	<i>Enoncés des exercices</i>	467
2.	<i>Corrigés des exercices</i>	470
INDEX		