

Spis treści

Przedmowa	11
1 Wprowadzenie do teorii równań różniczkowych zwyczajnych	13
1.1 Podstawowe pojęcia	13
1.2 Zjawiska opisywane równaniami różniczkowymi	17
1.3 Interpretacja geometryczna rozwiązań	22
1.4 Wprowadzenie zagadnienia Cauchy'ego	30
1.5 Zadania	32
2 Podstawowe metody całkowania równań różniczkowych pierwszego rzędu	33
2.1 Równanie o zmiennych rozdzielonych	33
2.2 Równanie jednorodne	38
2.3 Równanie liniowe	43
2.3.1 Rozwiązanie ogólne jednorodnego równania liniowego	44
2.3.2 Rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla jednorodnego równania liniowego	45
2.3.3 Rozwiązanie ogólne niejednorodnego równania liniowego	46
2.3.4 Rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla niejednorodnego równania liniowego	49
2.4 Równanie Bernoulliego	51
2.5 Zadania	54
3 Istnienie i jednoznaczność rozwiązania równania różniczkowego $y' = f(t, y)$	55
3.1 Zagadnienie Cauchy'ego	55

3.2	Definicja rozwiązania równania pierwszego rzędu	56
3.3	Łamane Eulera i twierdzenie Peano o istnieniu rozwiązania	56
3.4	Warunek Lipschitza	58
3.5	Twierdzenie Picarda-Lindelöfa	59
3.6	Twierdzenie Picarda-Lindelöfa – przypadek jednostronnego otoczenia punktu	69
3.7	Twierdzenie Picarda-Lindelöfa – przypadek obszaru nieograniczonego w odniesieniu do zmiennej zależnej	70
3.8	Twierdzenie Picarda-Lindelöfa – przypadek obszaru nieograniczonego ze względu na obie zmienne	71
3.9	Uwaga na temat równania liniowego	74
3.10	Zadania	75
4	Układy równań różniczkowych	77
4.1	Układ równań różniczkowych w postaci uwikłanej	77
4.2	Postać normalna układu równań różniczkowych	77
4.3	Zapis wektorowy układu normalnego	78
4.4	Definicja rozwiązania układu równań różniczkowych	79
4.5	Omówienie liczby rozwiązań układu równań różniczkowych	79
4.6	Interpretacja geometryczna układu normalnego	80
4.7	Zagadnienie Cauchy’ego dla układu normalnego	81
4.8	Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności zagadnienia Cauchy’ego dla układu normalnego	81
4.9	Modyfikacje twierdzenia Picarda-Lindelöfa	84
4.10	O warunku Lipschitza	85
4.11	Przedłużalność rozwiązania	86
4.12	Zagadnienie początkowe dla układu liniowego	90
4.13	Zadania	91
5	Równanie różniczkowe n-tego rzędu	93
5.1	Postać uwikłana równania n -tego rzędu	93
5.2	Postać normalna równania n -tego rzędu	93
5.3	Definicja rozwiązania równania n -tego rzędu	94
5.4	Związek między równaniami n -tego rzędu i układem	94

5.5	Zagadnienie Cauchy'ego dla równania n -tego rzędu	95
5.6	Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego dla równania n -tego rzędu	96
5.7	Zagadnienie początkowe dla równania liniowego n -tego rzędu	97
5.8	Niektóre specjalne typy równań n -tego rzędu	97
5.8.1	Równanie $y^{(n)} = g(t)$	97
5.8.2	Równanie $F(t, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$	99
5.8.3	Równanie $y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$	100
5.8.4	Równanie $F(y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$	100
5.9	Równanie opisujące ruch wahadła	101
5.10	Zadania	104
6	Równanie różniczkowe liniowe n-tego rzędu	105
6.1	Równanie różniczkowe liniowe n -tego rzędu	105
6.2	Liniowość równań	106
6.3	Zasada składania	107
6.4	Składanie i rozwiązanie ogólne	108
6.5	Liniowa zależność i niezależność układu funkcji	110
6.6	Wrońskian układu funkcji	112
6.7	Wrońskian układu rozwiązań równania jednorodnego	114
6.8	Układ fundamentalny rozwiązań równania jednorodnego	115
6.9	Wzór Liouville'a-Ostrogradskiego	116
6.10	Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego	117
6.11	Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego	119
6.12	Obniżenie rzędu równania jednorodnego	120
6.13	Zadania	123
7	Rozwiązanie ogólne równania liniowego jednorodnego n-tego rzędu o stałych współczynnikach	125
7.1	Równanie charakterystyczne	125
7.2	Pomocnicze operatory symboliczne	127
7.3	Rozwiązanie ogólne	129
7.4	Zamiana zespolonych rozwiązań na rzeczywiste	131
7.5	Oscylacje harmoniczne	134

7.6	Zadania	138
8	Rozwiązanie szczególne równania liniowego niejednorodnego n-tego rzędu	139
8.1	Metoda uzmienniania stałych	139
8.2	Metoda współczynników nieoznaczonych	146
8.3	Równanie różniczkowe Eulera	149
8.4	Rezonans	151
8.5	Zadania	153
9	Układ równań różniczkowych liniowych	155
9.1	Pojęcie układu liniowego	155
9.2	O liniowości układu równań	157
9.3	Zasada składania	158
9.4	Liniowa zależność i niezależność funkcji wektorowych	159
9.5	Wzór Abela-Liouville'a	161
9.6	Macierz fundamentalna i układ fundamentalny rozwiązań	163
9.7	Twierdzenie o strukturze rozwiązań jednorodnego układu	165
9.8	Rozwiązanie ogólne jednorodnego układu liniowego	167
9.9	Rozwiązanie ogólne niejednorodnego układu liniowego	169
9.10	Rozwiązanie szczególne niejednorodnego układu liniowego. Metoda uzmienniania stałych	170
9.11	Pewna własność macierzy fundamentalnej	172
9.12	Macierz wykładnicza i jej stosowanie	174
9.12.1	Definicja macierzy wykładniczej	174
9.12.2	Jedna z metod obliczania macierzy wykładniczej	178
9.12.3	Wykorzystanie macierzy wykładniczej w rozwiązywaniu układów liniowych	181
9.12.4	Wzmianka o pewnej własności macierzy fundamentalnej	185
9.13	Przekształcenie równania liniowego n -tego rzędu w układ	185
9.14	Zadania	187
10	Liniowy układ jednorodny o stałych współczynnikach. Metoda wektorów własnych	189

10.1	Kilka podstawowych pojęć	189
10.2	Przypadek pojedynczych (parami różnych) wartości własnych .	191
10.3	Przypadek zespolonych wartości własnych	194
10.4	Przypadek wielokrotnych wartości własnych	198
10.4.1	Uogólnione wektory własne	198
10.4.2	Metoda wektorów własnych – konstrukcja układu fundamentalnego	199
10.4.3	Metoda macierzy Weyra	205
10.4.4	Konstrukcja tabeli w metodzie Weyra	206
10.4.5	Przykłady rozwiązań metodą Weyra	208
10.5	Zadania	214
11	Metoda eliminacji dla układów równań różniczkowych ..	215
11.1	Istota metody eliminacji	215
11.2	Przykłady rozwiązywania metodą eliminacji	216
11.3	Uwaga o wykorzystaniu metody eliminacji w przypadku układów nieliniowych	222
11.4	Zadania	224
12	Niejednorodny układ liniowy o stałych współczynnikach. Metoda współczynników nieoznaczonych	225
12.1	Bezpośrednia metoda współczynników nieoznaczonych	226
12.2	Pośrednia metoda współczynników nieoznaczonych	228
12.2.1	Przypadek I	228
12.2.2	Przypadek II	230
12.2.3	Przypadek III	232
12.3	Zadania	234
13	Transformacja Laplace’a	235
13.1	Transformata Laplace’a	236
13.2	Własności transformaty Laplace’a	239
13.3	Splot funkcji	251
13.3.1	Odwrotne przekształcenie Laplace’a	257

13.4	Przykłady zastosowania przekształcenia Laplace'a do rozwiązywania układów równań różniczkowych	260
13.4.1	Wykorzystanie przekształcenia Laplace'a w fizyce	270
13.5	Zadania	274
Odpowiedzi		275
Literatura		282
Indeks		284