

Spis treści

1. Elementy logiki	13
1.1. Algebraiczna metoda weryfikacji tautologii	15
1.2. Rachunek kwantyfikatorów	18
2. Zbiory	21
2.1. Tożsamości na zbiorach	21
2.2. Funkcje charakterystyczne	26
2.3. Operacja różnicy symetrycznej zbiorów	37
2.4. Równania na zbiorach	49
2.5. Iloczyn kartezjański	54
2.6. Układy równań na zbiorach	57
2.7. Indeksowane rodziny zbiorów	62
3. Relacje	72
3.1. Relacje binarne	72
3.2. Relacje równoważności	76
3.3. Przekroje relacji równoważności	98
3.4. Sumy mnogościowe relacji równoważności	99
3.5. Częściowy porządek	101
3.6. Dobry porządek, twierdzenie Zermela o dobrym uporządkowaniu	112
4. Odwzorowania	120
4.1. Injekcje, surjekcje na dany zbiór	120
4.2. Bijekcje na dany zbiór	126
4.3. Funkcje odwrotne	132
4.4. Inwolucje	134
4.5. Operacje algebraiczne na funkcjach ściśle monotonicznych	139
4.6. Pomocnik analityczny	142
4.7. Zestaw zadań ćwiczeniowych	143
5. Pewnik wyboru (Axiom of Choice, AC)	146
5.1. Funkcje wyboru na rodzinach zbiorów skończonych	158
5.2. Różnowartościowe funkcje wyboru	159
5.3. Zasada wyborów zależnych	161
6. Lemat Kuratowskiego-Zorna	164
7. Twierdzenie Cantora-Bernsteina	168

8. Moce zbiorów	174
8.1. Wybór podstawowych faktów	174
8.2. Konstrukcja Cantora-Königa bijekcji $f: (0, 1] \times (0, 1] \rightarrow (0, 1]$	179
8.3. Podział rodziny prostych w $\mathbb{R}^n$	180
8.4. Zadania	181
8.5. Bazy Hamela, normy...	192
9. Nieskończoność zbioru liczb pierwszych	198
9.1. Funkcje charakterystyczne okresowe	198
9.2. Dowód mnogościowy nieskończoności zbioru liczb pierwszych	199
10. Indukcja matematyczna	201
11. Arytmetyka Peana	218
11.1. Zasada indukcji matematycznej w posetach	219
11.2. Twierdzenie Nasha-Williamsa	221
12. Przykładowy zestaw zadań na kolokwium	224
12.1. Zestaw A	224
12.2. Zestaw B	225
12.3. Zestaw C	226
12.4. Zestaw D	227
12.5. Zestaw E	228
12.6. Teoria	230
13. Dodatki	233
13.1. Liczby algebraiczne i liczby przestępne	233
13.2. Przykłady liczb algebraicznych i przestępnych	236
13.3. Twierdzenie Lindemanna dla macierzy	238
13.4. Ciekawostka na temat przestępności liczb πe oraz $\pi + e$	238
13.5. Liczby algebraiczne postaci $P(T)^{Q(T)}$	239
13.6. Jeszcze jeden dowód nieprzeliczalności zbioru liczb rzeczywistych	241
13.7. Punkty stałe odwzorowań $f: X \rightarrow X$, takich że $f^p = \text{id}_X$	241
13.8. O pewnym problemie Stanisława Ulama o odwzorowaniu Peano	243
13.9. Twierdzenie Sierpińskiego o łańcuchu nieskończonym	245
13.10. Twierdzenie Cantora-Bernsteina a topologia	246
13.10.1. Wybrane własności homeomorfizmów	248
13.10.2. Twierdzenie Cantora-Bernsteina i homeomorfizmy	250
13.10.3. Położenie zbiorów w przestrzeni	252
13.10.4. Specjalne pary niehomeomorficznych przestrzeni topologicznych	254
13.11. Wersja twierdzenia Cantora-Bernsteina dla zbiorów gęstych	256
13.12. Problem Frobeniusa o monetach	259
13.13. Ideały i filtry w posetach	259
13.14. Przestrzenie metryczne – podstawowe definicje	263
14. Przewodnik po projektach	264

15. Aksjomaty teorii mnogości Zermela-Fraenkla	268
16. Oznaczenia	270
Bibliografia	272