

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>vii</b>
<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>x</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Einführung: Was ist ein inverses Problem?</b>	<b>1</b>
1.1 Computer-Tomographie . . . . .	1
1.2 Impedanz-Tomographie . . . . .	4
1.3 Ein inverses Streuproblem: Ultraschall-Tomographie . . . . .	6
1.4 Inverse Wärmeleitungsprobleme . . . . .	9
1.4.1 Eindimensionales Wärmeleitungsproblem . . . . .	9
1.4.2 Bestimmung der Wandstärke eines Hochofens . . . . .	11
1.5 Abstrakte Formulierung inverser Probleme . . . . .	14
1.6 Übungsaufgaben . . . . .	18
<b>2 Schlecht gestellte Operatorgleichungen</b>	<b>20</b>
2.1 Verallgemeinerte Inverse (Moore–Penrose-Inverse) . . . . .	20
2.2 Kompakte Operatoren . . . . .	24
2.3 Singulärwertzerlegung kompakter Operatoren . . . . .	28
2.4 Ein Funktionalkalkül für kompakte Operatoren . . . . .	35
2.5 Ein weiteres Beispiel zur SWZ: Die Radon-Transformation . . . . .	37
2.6 Übungsaufgaben . . . . .	47
<b>3 Regularisierung linearer Probleme und Optimalität</b>	<b>52</b>
3.1 Vorbetrachtungen . . . . .	52
3.2 Klassifizierung von Regularisierungsverfahren . . . . .	54
3.2.1 Grundlagen . . . . .	54
3.2.2 Abstrakte Glattheit . . . . .	56
3.2.3 Optimalität von Rekonstruktionsalgorithmen . . . . .	58
3.3 Eine allgemeine Theorie linearer Regularisierungen . . . . .	62
3.4 Das Diskrepanzprinzip . . . . .	71
3.5 Ein verallgemeinertes Diskrepanzprinzip . . . . .	76
3.6 Heuristische (“ $\varepsilon$ -freie”) Parameterstrategien . . . . .	82
3.7 Übungsaufgaben . . . . .	90
<b>4 Tikhonov–Phillips-Regularisierung</b>	<b>93</b>
4.1 Verallgemeinerte Tikhonov–Phillips-Regularisierung . . . . .	93
4.2 Iterierte Tikhonov–Phillips-Regularisierung . . . . .	101
4.3 Übungsaufgaben . . . . .	104

<b>5</b>	<b>Iterative Regularisierungen</b>	<b>106</b>
5.1	Landweber-Verfahren . . . . .	106
5.2	Semi-iterative Verfahren . . . . .	115
5.2.1	Die $\nu$ -Methoden . . . . .	119
5.3	Das Verfahren der konjugierten Gradienten (cg-Verfahren) . . .	121
5.3.1	Herleitung . . . . .	122
5.3.2	Historische Herleitung des cg-Verfahren . . . . .	126
5.3.3	cg-Polynome und ihre Orthogonalität . . . . .	128
5.3.4	Stabilität und Konvergenz . . . . .	132
5.3.5	Das Diskrepanzprinzip . . . . .	137
5.3.6	Anzahl der Iterationen . . . . .	146
5.4	Übungsaufgaben . . . . .	149
<b>6</b>	<b>Diskretisierung und Regularisierung</b>	<b>153</b>
6.1	Projektionsverfahren . . . . .	153
6.1.1	Diskretisierung durch Projektionsverfahren . . . . .	153
6.1.2	Konvergenz von Projektionsverfahren . . . . .	156
6.1.2.1	Anwendung der Fehlerquadratmethode auf die Symmsche Integralgleichung . . . . .	161
6.1.3	Regularisierung durch Projektionsverfahren . . . . .	163
6.1.3.1	Ein numerisches Experiment zur Fehlerquadrat- methode . . . . .	166
6.2	Regularisierung von Projektionsverfahren . . . . .	171
6.2.1	Ein Diskrepanzprinzip für lineare Verfahren . . . . .	173
6.2.2	Ein Diskrepanzprinzip für das cg-Verfahren . . . . .	182
6.2.3	Numerische Experimente . . . . .	188
6.2.4	Gebrochene Potenzen von Operatoren: Normabschätzungen	190
6.3	Semi-diskrete Probleme: Die Approximative Inverse . . . . .	195
6.3.1	Einführende Betrachtungen . . . . .	195
6.3.2	Konvergenz und Stabilität . . . . .	202
6.3.3	Anwendung der Approximativen Inversen auf die Tomogra- phie . . . . .	208
6.3.3.1	Konvergenz und Stabilität . . . . .	208
6.3.3.2	Algorithmus der gefilterten Rückprojektion . . . .	213
6.4	Übungsaufgaben . . . . .	219
<b>7</b>	<b>Nichtlineare schlecht gestellte Probleme</b>	<b>223</b>
7.1	Lokale Schlechtgestellttheit . . . . .	223
7.2	Fréchet-Differenzierbarkeit . . . . .	228
7.3	Charakterisierung nichtlinearer schlecht gestellter Probleme . .	232
7.4	Nichtlineare Tikhonov-Phillips-Regularisierung . . . . .	240
7.5	Iterative Methoden vom Newton-Typ . . . . .	247
7.5.1	Das nichtlineare Landweber-Verfahren . . . . .	248
7.5.2	Regularisierungen vom Gauß-Newton-Typ . . . . .	249

---

7.5.3	Inexakte Newton-Verfahren . . . . .	250
7.5.3.1	Termination der <b>repeat</b> -Schleife . . . . .	252
7.5.3.2	Termination der <b>while</b> -Schleife . . . . .	253
7.5.3.3	Konvergenz und Regularisierungseigenschaft . . .	263
7.5.3.4	Dynamische Steuerung der Toleranzen . . . . .	265
7.5.3.5	Numerische Experimente . . . . .	266
7.6	Übungsaufgaben . . . . .	271
<b>8</b>	<b>Anhang: Grundbegriffe aus der Funktionalanalysis</b>	<b>275</b>
8.1	Normierte Räume und lineare Abbildungen . . . . .	275
8.2	Drei Hauptsätze der Funktionalanalysis . . . . .	280
8.3	Innenprodukträume . . . . .	280
8.3.1	Orthogonalität und Orthogonalprojektoren . . . . .	283
8.3.2	Orthonormalbasen . . . . .	284
8.3.3	Adjungierte Operatoren . . . . .	286
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>288</b>
	<b>Index</b>	<b>297</b>