

Przedmowa.....	11
Rozdział I. Teoria płyt Kirchhoffa.....	13
1. Założenia i podstawowe zależności	13
1.1. Podstawowe założenia.....	13
1.2. Stan przemieszczenia i odkształcenia	14
1.3. Stan naprężenia i izotropowe związki fizyczne.....	15
1.4. Wyznaczenie składowych wektora naprężenia ścinającego	16
2. Lokalne równania równowagi i uogólnione siły wewnętrzne.....	17
2.1. Momenty i siły poprzeczne.....	17
2.2. Równania równowagi płyty.....	19
2.3. Siły i momenty wewnętrzne w funkcji pochodnych ugięcia płyty.....	20
3. Równanie przemieszczeniowe Germain-Lagrange'a.....	21
4. Zastępcze siły Kirchhoffa.....	22
5. Zagadnienia brzegowe teorii płyt.....	24
6. Płyty spoczywające na sprężystym podłożu	26
7. Wyprowadzenie podstawowych równań teorii płyt anizotropowych	27
7.1. Płyty ortotropowe	27
7.2. Płyty anizotropowe oraz przypadki szczególne, płyty ortotropowe, płyty o symetrii regularnej i płyty izotropowe.....	30
8. Płyty o ortotropii technicznej.....	33
Rozdział II. Zginanie walcowe pasm płytowych	36
1. Zginanie walcowe izotropowych lub ortotropowych pasm płytowych	36
1.1. Płyty izotropowe.....	36
1.2. Jednorodne ortotropowe pasma płytowe	39
2. Statycznie wyznaczalne i statycznie niewyznaczalne zginanie walcowe pasm płytowych.....	40
2.1. Równania równowagi i uwagi o rozwiązywaniu zadań statycznie wyznaczalnych.....	40
2.2. Przykłady zadań statycznie wyznaczalnych i niewyznaczalnych	43
2.2.1. Płyta swobodnie podparta obciążona równomiernie.....	43
2.2.2. Płyta wspornikowa.....	46
2.2.3. Pasma płytowe statycznie niewyznaczalne.....	51
2.2.4. Pasma płytowe statycznie niewyznaczalne – zastosowanie programu Mathematica	52
3. Przykładowe zadania dotyczące zginania pasm płytowych.....	54
3.1. Pasma płytowe o rozwiązaniach bez całek szczególnych	54
3.1.1. Podstawowe równania.....	54
3.1.2. Pasma płytowe swobodnie podparte, obciążone na brzegu momentami	55
3.1.3. Pasma swobodnie podparte, obciążone wzdłuż linii w środku rozpiętości	58

3.2. Pasma płytowe o rozwiązaniach z całkami szczególnymi	60
3.2.1. Podstawowe równania.....	60
3.2.2. Pasma utwierdzone, obciążone równomiernie.....	60
3.2.3. Pasma wspornikowe obciążone równomiernie.....	63
3.2.4. Pasma płytowe na jednym brzegu swobodnie podparte, a na drugim utwierdzone, obciążone równomiernie	64
4. Zastosowanie dystrybucji Diraca i funkcje Greena	65
4.1. Dystrybucje Diraca i Heaviside'a.....	65
4.2. Pasma płytowe swobodnie podparte, obciążone wzdłuż prostej.....	67
4.2.1. Rozwiązanie zadania brzegowego z zastosowaniem dystrybucji	67
4.2.2. Funkcje Greena dla pasma płytowego swobodnie podpartego	70
4.3. Funkcje Greena i ich zastosowanie w typowych pasmach płytowych	71
4.3.1. Funkcje Greena i zasada superpozycji	71
4.3.2. Przykłady zastosowania funkcji Greena	72
4.4. Funkcje Greena w programie Mathematica.....	75
5. Pasma płytowe o zmiennej sztywności	78
5.1. Podstawowe równania	78
5.2. Pasma płytowe o zmiennym module Younga swobodnie podparte, obciążone równomiernie	79
5.3. Zastosowanie programu Mathematica do zagadnień pasm o zmiennej wysokości.....	80
Rozdział III. Zginanie walcowe pasma płytowego na sprężystym podłożu	84
1. Zależności podstawowe	84
1.1. Rozwiązanie jednorodnego równania różniczkowego na ugięcie płyty.....	84
1.2. Uwagi o rozwiązaniu zadania pasma płytowego obciążonego równomiernie	85
2. Przykłady wstępne	89
2.1. Nieskończona płyta obciążona momentem rozłożonym na linii	89
2.2. Płyta w kształcie półpłaszczyzny obciążona równomiernie na brzegu	91
2.3. Nieskończona płyta obciążona równomiernie na linii	93
3. Symetryczne pasma płytowe.....	101
3.1. Podstawowe zależności	101
3.2. Zadania bez całki szczególnej	101
3.2.1. Płyta swobodnie spoczywająca na sprężystym podłożu, obciążona momentami na brzegu	101
3.2.2. Płyta swobodnie podparta, obciążona momentami na brzegu	104
3.2.3. Płyta swobodnie spoczywająca na sprężystym podłożu, obciążona siłami na brzegu.....	106
3.3. Pasma płytowe obciążone równomiernie	106
3.3.1. Płyta swobodnie podparta, równomiernie obciążona.....	106
3.3.2. Płyta utwierdzona, równomiernie obciążona	107
3.4. Wybrane przykłady i ćwiczenia.....	108
4. Przykłady – płyty w kształcie płaszczyzny lub półpłaszczyzny	108
4.1. Nieskończona płyta na sprężystym podłożu obciążona na pasie.....	108
4.2. Płyta w kształcie półpłaszczyzny obciążona na pasie przy brzegu	112
5. Pasma płytowe	114
5.1. Pasma równomiernie obciążone na linii.....	114
5.2. Pasma obciążone równomiernie na powierzchni i siłą na linii.....	116

Rozdział IV. Zależności teorii płyt anizotropowych w zapisie tensorowym	121
1. Podstawowe równania i zależności liniowej teorii sprężystości.....	121
1.1. Uwagi wstępne.....	121
1.2. Sformułowanie zagadnienia brzegowego	122
2. Sformułowanie zadania statyki płyt w notacji absolutnej	124
2.1. Płyty izotropowe.....	124
2.2. Płyty anizotropowe	128
3. Energia sprężystości w płytach izotropowych i anizotropowych	130
4. Płyty z kompozytów włóknistych	131
4.1. Płaski stan naprężenia, matryca zbrojona kilkoma rodzinami włókien.....	131
4.2. Typy symetrii materiału.....	132
4.3. Przykłady	133
5. Płyty żelbetowe	134
6. Przykłady ilustrujące podstawowe zależności i równania teorii płyt.....	136
6.1. Trójkątna płyta równoboczna	136
6.1.1. Swobodnie podparta płyta, obciążona równomiernie na brzegach rozłożonymi momentami.....	136
6.1.2. Swobodnie podparta płyta, obciążona równomiernie	139
6.2. Zastosowanie rozwiązań osobliwych	142
6.3. Utwierdzona anizotropowa płyta eliptyczna obciążona równomiernie.....	146
Rozdział V. Równania jednorodnych płyt izotropowych we współrzędnych biegunowych	151
1. Układy współrzędnych kartezjańskich, walcowych i biegunowych.....	151
2. Współrzędne biegunowe	152
2.1. Lokalna baza i kobaza oraz baza fizyczna	152
2.2. Gradient, dywergencja, laplasjan i bilaplasjan	154
3. Wyprowadzenie podstawowych równań teorii płyt izotropowych we współrzędnych biegunowych	156
3.1. Kąty obrotu przekrojów poprzecznych płyty	156
3.2. Laplasjan i bilaplasjan oraz równanie różniczkowe ugięcia płyty	157
3.3. Tensor krzywizn i tensor momentów.....	158
3.4. Siły poprzeczne.....	159
Rozdział VI. Płyty o symetrii kołowej	161
1. Ogólne rozwiązanie zadania zginania izotropowych płyt kołowych i pierścieniowych.....	161
2. Ćwiczenia wstępne.....	167
2.1. Zależności podstawowe.....	167
2.2. Przykłady	168
2.2.1. Swobodnie podparta płyta kołowa obciążona momentem na brzegu	168
2.2.2. Płyta swobodnie podparta i płyta utwierdzona obciążona równomiernie.....	170
2.2.3. Płyta pierścieniowa obciążona równomiernie.....	177
2.2.4. Płyty pierścieniowe obciążone na brzegu równomiernie rozłożonymi siłami.....	179
2.2.5. Płyta swobodnie podparta i płyta utwierdzona obciążona siłą skupioną	183
2.3. Uwagi o funkcji Greena dla płyt nieograniczonych	186
3. Pełne płyty kołowe.....	187
3.1. Pełne płyty kołowe utwierdzone i swobodnie podparte	187
3.2. Płyty z podporą w środku	189
3.2.1. Płyta swobodnie podparta z podporą w środku, obciążona na brzegu równomiernie rozłożonymi momentami	189
3.2.2. Płyty obciążone równomiernie.....	192

4. Płyty pierścieniowe	195
4.1. Płyty pierścieniowe obciążone równomiernie	195
4.1.1. Podstawowe wzory.....	195
4.1.2. Przykłady.....	196
4.2. Zadania bez całek szczególnych	198
4.2.1. Swobodnie podparta płyta kołowa z otworem obciążona momentem na brzegu	198
4.2.2. Utwardzona płyta kołowa z otworem obciążona momentem na brzegu	200
5. Płyty ze wspornikiem.....	205
5.1. Płyta ze wspornikiem obciążona momentem	205
5.2. Płyta ze wspornikiem obciążona równomiernie	207
6. Wybrane zadania	208
6.1. Pełne płyty kołowe obciążone równomiernie na części obszaru.....	208
6.2. Płyty wieloprzęsłowe.....	211
7. Płyty kołowo symetryczne na sprężystym podłożu – zastosowanie programu Mathematica.....	211

Rozdział VII. Podwójne szeregi trygonometryczne Fouriera w zastosowaniu do zagadnień brzegowych teorii płyt.....

1. Podwójne szeregi sinusowe.....	218
1.1. Rozwiązanie zadania Naviera.....	218
1.2. Zestawienie wzorów na wielkości kinematyczne i statyczne.....	222
1.3. Płyty prostokątne na sprężystym podłożu	224
1.4. Przykłady wyznaczania współczynników obciążenia i ugięcia płyty w podwójnych szeregach sinusowych.....	225
1.4.1. Płyta swobodnie podparta, obciążona siłą skupioną	225
1.4.2. Płyta swobodnie podparta, obciążona siłami rozłożonymi równomiernie na linii	226
1.4.3. Płyty swobodnie podparte, obciążone powierzchniowo	227
1.5. Zasada superpozycji i funkcja Greena.....	236
1.6. Trajektorie krzywizn i momentów głównych.....	240
1.7. Płyta w postaci prostokątnego trójkąta równoramiennego	242
2. Podwójne szeregi trygonometryczne w płytach ortotropowych	243
2.1. Podstawowe zależności	243
2.2. Przykłady	246
3. Podwójne szeregi sinusowo-kosinusowe	249
3.1. Podstawowe zależności	249
3.2. Przykłady zastosowania szeregów kosinusowo-sinusowych	250
3.2.1. Obciążenie na linii.....	250
3.2.2. Obciążenie na linii – zginanie walcowe.....	251
3.2.3. Obciążenie siłą punktową	252
3.2.4. Półpasmo obciążone periodycznie	253
4. Podwójne szeregi kosinusowo-kosinusowe	255
4.1. Podstawowe zależności	255
4.2. Przykłady zastosowania szeregów kosinusowo-kosinusowych	257
4.2.1. Płyta spoczywająca na słupie, obciążona siłą skupioną.....	257
4.2.2. Płyta spoczywająca na słupie, obciążona równomiernie na powierzchni prostokąta.....	258
5. Wybrane przykłady zastosowania podwójnych szeregów trygonometrycznych	259
5.1. Uwagi o zastosowaniach podwójnych szeregów trygonometrycznych.....	259
5.2. Płyty wzmocnione żebrami.....	259
6. Zastosowanie podwójnych szeregów sinusowych w programie Mathematica.....	262
6.1. Płyta swobodnie podparta, obciążona punktowo.....	262
6.2. Płyta swobodnie podparta, obciążona wzdłuż krzywej	266

Rozdział VIII. Zastosowanie pojedynczych szeregów trygonometrycznych Fouriera	269
1. Płyty izotropowe	269
1.1. Rozwiązanie ogólnego zadania Lévy'ego	269
1.2. Przykłady	273
2. Pojedyncze szeregi trygonometryczne w płytach ortotropowych	275
2.1. Dyskusja ogólnych rozwiązań zadania zginania płyt	275
2.2. Przykłady określania typu rozwiązania zadania dla różnych materiałów ortotropowych	278
3. Płyty izotropowe i ortotropowe na sprężystym podłożu	281
4. Zastosowanie szeregów pojedynczych w półpasmach	283
4.1. Ogólne zależności	283
4.2. Przypadki szczególne podparcia półpasma płytowego	285
4.2.1. Utwierdzenie z przesuwnem – zginanie walcowe	285
4.2.2. Brzeg swobodnie podparty	287
4.2.3. Utwierdzenie	288
4.2.4. Brzeg swobodny	290
4.3. Przykłady pasm i półpasm płytowych o różnych warunkach brzegowych	292
5. Płyty symetryczne	297
5.1. Uwagi wstępne	297
5.2. Płyty izotropowe	298
5.2.1. Płyta prostokątna swobodnie podparta	298
5.2.2. Płyta na dwóch brzegach swobodnie podparta i na dwóch brzegach utwierdzona	300
5.2.3. Płyta na dwóch brzegach swobodnie podparta i na dwóch brzegach swobodna	301
5.3. Płyty ortotropowe	302
5.3.1. Płyta na dwóch brzegach swobodnie podparta i na dwóch brzegach utwierdzona	302
6. Płyty o różnych warunkach brzegowych	304
6.1. Uwagi	304
6.2. Swobodnie podparta płyta prostokątna zginana momentami rozłożonymi wzdłuż krawędzi	306
6.2.1. Obciążenie symetryczne	307
6.2.2. Obciążenie antysymetryczne	308
6.2.3. Obciążenie dowolne	309
6.3. Wybrane przykłady	309
 Rozdział IX. Zastosowanie szeregów trygonometrycznych Fouriera we współrzędnych biegunowych	 311
1. Zestawienie podstawowych zależności	311
1.1. Uwagi wstępne	311
1.2. Płyty o kształcie koła i pierścienia obciążone niesymetrycznie	313
2. Płyty o kształcie wycinka koła lub pierścienia – zastosowanie pojedynczych szeregów sinusowych	316
2.1. Podstawowe zależności	316
2.2. Płyta półkola obciążona równomiernie	318
2.2.1. Płyta półkola swobodnie podparta	319
2.2.2. Płyta półkola swobodnie podparta na brzegu prostoliniowym i utwierdzona na brzegu krzywoliniowym	320
3. Płyty kołowe, pierścieniowe i półkoliste z niesymetrycznym obciążeniem liniowym	321
3.1. Sformułowanie rozpatrywanych zadań i zestawienie wzorów	321
3.2. Płyta pierścieniowa	322
3.3. Płyta kołowa zamknięta	323
3.4. Przykłady	324

Rozdział X. Metody wariacyjne	327
1. Metody Ritza-Timoshenki i Bubnowa-Galerkina	327
1.1. Uwagi wstępne.....	327
1.2. Metoda Ritza-Timoshenki	328
1.3. Metoda Bubnowa-Galerkina.....	329
2. Przykłady wstępne	330
2.1. Zginanie walcowe płyt obustronnie utwierdzonej i obustronnie swobodnie podpartej ..	330
2.1.1. Płyta utwierdzona.....	330
2.1.2. Płyta swobodnie podparta	332
2.1.3. Różne przykłady obciążenia	333
2.2. Zginana walcowo płyta na jednym z brzegów utwierdzonej.....	338
2.2.1. Swobodnie podparty drugi brzeg płyty	338
2.2.2. Płyta wspornikowa.....	339
2.3. Płyta prostokątna przegubowo podparta na wszystkich brzegach.....	341
2.3.1. Obciążenie równomierne	341
2.3.2. Obciążenie w środku siłą skupioną.....	343
2.3.3. Płyta ortotropowa	344
2.4. Płyta prostokątna na dwóch brzegach przegubowo podparta, zaś na dwóch utwierdzo-	
na, obciążona siłą skupioną w środku.....	346
2.4.1. Metoda R-T	347
2.4.2. Metoda B-G.....	348
2.4.3. Płyta ortotropowa	349
2.5. Utwierdzonej płyta prostokątna	350
2.5.1. Płyta izotropowa.....	350
2.5.2. Płyta ortotropowa	352
3. Przykłady zastosowania metod wariacyjnych w przypadku płyt kołowo symetrycznych	353
3.1. Funkcja energii sprężystości	353
3.2. Płyta kołowa utwierdzonej na obwodzie	354
3.3. Płyta kołowa podparta przegubowo na obwodzie	360
3.3.1. Płyta kołowa podparta przegubowo, obciążona równomiernie	360
3.3.2. Płyta kołowa podparta przegubowo na obwodzie, obciążona siłą P w środku.....	364
3.4. Płyta kołowa na sprężystym podłożu obciążona siłą w środku.....	367
3.5. Wybrane przykłady zagadnień kołowo symetrycznych	369
Dodatek. Przykłady rozwiązań zadań brzegowych w programie Mathematica	371
1. Elementy środowiska pakietu Mathematica	371
2. Przykłady rozwiązań zadań izotropowych płyt Kirchhoffa.....	375
2.1. Zginanie walcowe na podłożu Winklera z uwzględnieniem więzów jednostronnych ..	375
2.2. Funkcja Greena w podwójnych szeregach sinusowych.....	379
2.3. Płyta swobodnie podparta, obciążona na obszarze trójkątnym	379
2.4. Płyta swobodnie podparta, obciążona na obszarze kołowym.....	383
2.5. Płyta swobodnie podparta, obciążona momentami równomiernie na dwóch krawę-	
dziach.....	387
3. Przykłady zastosowania metod aproksymacyjnych do rozwiązywania zadań anizotropo-	
wych płyt Kirchhoffa.....	389
3.1. Płyta o ortotropii technicznej utwierdzonej na wszystkich brzegach.....	390
3.2. Płyta o ortotropii technicznej swobodnie podparta na wszystkich brzegach	395
Bibliografia	398