

Inhaltsverzeichnis

I	Funktionalanalysis	1
1	Grundlegende Räume	5
1.1	Metrische Räume	5
1.1.1	Definition und Beispiele	5
1.1.2	Topologische Hilfsmittel	10
1.1.3	Konvergenz in metrischen Räumen. Vollständigkeit	10
1.1.4	Bestapproximation in metrischen Räumen	18
1.1.5	Der Banachsche Fixpunktsatz. Anwendungen	19
1.2	Normierte Räume. Banachräume	29
1.2.1	Lineare Räume	29
1.2.2	Normierte Räume. Banachräume	33
1.3	Skalarprodukträume. Hilberträume	41
1.3.1	Skalarprodukträume	41
1.3.2	Hilberträume	47
1.3.3	Ein Approximationsproblem	51
1.3.4	Der Zerlegungssatz	55
1.3.5	Orthonormalsysteme in Hilberträumen	61
1.3.6	Fourierentwicklung in Hilberträumen	67
1.3.7	Struktur von Hilberträumen	69
2	Lineare Operatoren in normierten Räumen	75
2.1	Beschränkte lineare Operatoren	75
2.1.1	Stetigkeit und Beschränktheit. Operatornorm	75
2.1.2	Folgen und Reihen von beschränkten Operatoren	81
2.1.3	Die Neumannsche Reihe. Anwendungen	82
2.1.4	Lineare Funktionale in normierten Räumen	88
2.1.5	Der Rieszsche Darstellungssatz	90
2.1.6	Adjungierte und symmetrische Operatoren	92
2.2	Fredholmsche Theorie in Skalarprodukträumen	96
2.2.1	Vollstetige Operatoren	97
2.2.2	Ausgeartete Operatoren	100
2.2.3	Die Fredholmsche Alternative	102
2.2.4	Der Fredholmsche Alternativsatz in Hilberträumen	104
2.2.5	Der Fredholmsche Alternativsatz in Skalarprodukträumen	109
2.3	Symmetrische vollstetige Operatoren	119

2.3.1	Eigenwerte und -elemente vollstetiger symmetrischer Operatoren. Fourierentwicklung	120
2.3.2	Zusammenfassung	128
2.3.3	Anwendung auf symmetrische Integraloperatoren	129
2.3.4	Ein Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem	131
2.3.5	Das Spektrum eines symmetrischen Operators	139
3	Der Hilbertraum $L_2(\Omega)$ und zugehörige Sobolevräume	147
3.1	Der Hilbertraum $L_2(\Omega)$	147
3.1.1	Motivierung	147
3.1.2	Definition von $L_2(\Omega)$	149
3.1.3	Einbettung von $C_0^\infty(\Omega)$ in $L_2(\Omega)$	150
3.1.4	Restriktion und norminvariante Erweiterung von L_2 -Funktionalen	155
3.1.5	Produkt von L_2 -Funktionalen mit stetigen Funktionen	156
3.1.6	Differentiation in $L_2(\Omega)$	158
3.2	Sobolevräume	163
3.2.1	Der Sobolevraum $H_m(\Omega)$	163
3.2.2	Der Sobolevraum $\dot{H}_m(\Omega)$	164
3.2.3	Ergänzungen	166
II	Partielle Differentialgleichungen	171
4	Einführung	173
4.1	Was ist eine partielle Differentialgleichung?	173
4.1.1	Partielle Differentialgleichungen beliebiger Ordnung	173
4.1.2	Beispiele	174
4.1.3	Herleitung von partiellen Differentialgleichungen	176
4.2	Lineare partielle Differentialgleichungen 1-ter Ordnung	180
4.2.1	Zurückführung auf Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen	180
4.2.2	Anwendung auf die Kontinuitätsgleichung	183
4.3	Lineare partielle Differentialgleichungen 2-ter Ordnung	184
4.3.1	Klassifikation	184
4.3.2	Separationsansätze	187
5	Helmholtzsche Schwingungsgleichung und Potentialgleichung	191
5.1	Grundlagen	191
5.1.1	Hilfsmittel aus der Vektoranalysis	191
5.1.2	Radialsymmetrische Lösungen	193
5.1.3	Die Darstellungsformel für Innengebiete	194
5.1.4	Mittelwertformel und Maximumprinzip	199
5.1.5	Flächen- und Volumenpotentiale	202
5.2	Ganzraumprobleme	204
5.2.1	Volumenpotentiale und inhomogene Schwingungsgleichung	204
5.2.2	Die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung	211

5.2.3	Die Darstellungsformel für Außengebiete	220
5.2.4	Ganzraumprobleme	223
5.3	Randwertprobleme	226
5.3.1	Problemstellungen und Eindeutigkeitsfragen	227
5.3.2	Sprungrelationen	233
5.3.3	Lösungsnachweise mit Integralgleichungsmethoden	235
5.4	Ein Eigenwertproblem der Potentialtheorie	249
5.4.1	Die Greensche Funktion zum Dirichletschen Innenraumproblem	249
5.4.2	Eigenwerte und Eigenfunktionen des Laplace-Operators	252
5.5	Einführung in die Finite-Elemente-Methode	255
5.5.1	Die Fréchet-Ableitung	256
5.5.2	Variationsprobleme	259
5.5.3	Elliptische Randwertprobleme und äquivalente Variationsprobleme	264
5.5.4	Prinzip der Finite-Elemente-Methode (FEM)	269
5.5.5	Diskretes Variationsproblem	270
5.5.6	Beispiele	275
5.5.7	Ausblick auf weitere Möglichkeiten der Finite-Elemente-Methode	281
6	Die Wärmeleitungsgleichung	287
6.1	Rand- und Anfangswertprobleme	287
6.1.1	Ein Rand- und Anfangswertproblem mit Dirichletscher Randbedingung	288
6.1.2	Die Eindeutigkeitsfrage	289
6.1.3	Lösungsbestimmung mittels Eigenwerttheorie	290
6.2	Ein Anfangswertproblem	292
6.2.1	Aufgabenstellung	293
6.2.2	Die Grundlösung der Wärmeleitungsgleichung	294
6.2.3	Lösungsbestimmung mittels Fouriertransformation	294
7	Die Wellengleichung	299
7.1	Die homogene Wellengleichung	299
7.1.1	Anfangswertprobleme im $\mathbb{R}^1$	299
7.1.2	Anfangswertprobleme im $\mathbb{R}^3$	302
7.1.3	Anfangswertprobleme im $\mathbb{R}^2$ (»Method of descent«)	309
7.1.4	Das Huygenssche Prinzip	311
7.1.5	Bemerkungen zu Rand- und Anfangswertproblemen	312
7.2	Die inhomogene Wellengleichung im $\mathbb{R}^3$	316
7.2.1	Das Duhamelsche Prinzip	316
7.2.2	Die Kirchhoffsche Formel	318
7.2.3	Erzwungene Schwingungen	319
8	Die Maxwellschen Gleichungen	323
8.1	Die stationären Maxwellschen Gleichungen	323
8.1.1	Stationäre Maxwellsche Gleichungen und vektorielle Schwingungsgleichung	323
8.1.2	Grundlösungen	325
8.1.3	Asymptotisches Verhalten der Grundlösungen. Ausstrahlungsbedingungen	326

8.1.4	Darstellungsformeln	327
8.2	Randwertprobleme	330
8.2.1	Problemstellungen	330
8.2.2	Außenraumprobleme	330
8.2.3	Innenraumprobleme	335
9	Hilbertraummethoden	337
9.1	Einführung	337
9.1.1	Ein schwaches Dirichletproblem für die inhomogene Schwingungsgleichung	337
9.1.2	Nachweis einer schwachen Lösung	339
9.1.3	Ein äquivalentes schwaches Problem	341
9.2	Das schwache Dirichletproblem für lineare elliptische Differentialgleichungen	342
9.2.1	Das klassische Dirichletproblem	342
9.2.2	Das schwache Dirichletproblem	343
9.2.3	Ein äquivalentes schwaches Problem	343
9.2.4	Schwache Lösungen bei strikt positiven elliptischen Differentialoperatoren	345
9.2.5	Schwache Lösungen bei gleichmäßig elliptischen Differentialoperatoren	347
9.2.6	Eigenwerte und -elemente des schwachen Dirichletproblems	352
9.3	Das schwache Neumannproblem für lineare elliptische Differentialgleichungen	355
9.3.1	Ein schwaches Neumannproblem für die inhomogene Schwingungsgleichung	355
9.3.2	Nachweis einer schwachen Lösung	361
9.3.3	Ausblick auf den allgemeinen Fall	361
9.4	Zur Regularitätstheorie beim Dirichletproblem	363
9.4.1	Innenregularität	363
9.4.2	Randregularität	364
Anhang		371
A	Anhang	373
A.1	Der Fortsetzungssatz von Hahn-Banach	373
A.2	Der Satz von Lax-Milgram	375
B	Lösungen zu den Übungen	377
Symbole		405
Literaturverzeichnis		407
Stichwortverzeichnis		415