
Spis treści

Wstęp	11
1. Wprowadzenie	13
Co to jest algebra liniowa i dlaczego warto ją poznać?	13
O książce	14
Wymagania wstępne	14
Matematyka	14
Postawa	15
Programowanie	15
Dowody matematyczne kontra kod	16
Kod pokazany w książce i do pobrania z sieci	17
Ćwiczenia z programowania	17
Jak korzystać z tej książki (dla nauczycieli i osób uczących się samodzielnie)?	18
2. Wektory — część I	19
Tworzenie i wizualizacja wektorów w NumPy	19
Geometryczna interpretacja wektorów	21
Operacje na wektorach	22
Dodawanie dwóch wektorów	22
Geometryczne dodawanie i odejmowanie wektorów	24
Mnożenie wektorów przez skalar	24
Dodawanie wektorów i skalarów	25
Transpozycja	26
Broadcasting w Pythonie	27
Moduł wektora i wektory jednostkowe	28
Iloczyn skalarny wektorów	29
Iloczyn skalarny jest rozdzielny względem dodawania	31
Geometryczna interpretacja iloczynu skalarnego	31

Inne sposoby mnożenia wektorów	32
Iloczyn Hadamarda	33
Iloczyn zewnętrzny	33
Iloczyn wektorowy i mieszany	34
Ortogonalny rozkład wektora	34
Podsumowanie	38
Ćwiczenia z programowania	38
3. Wektory — część II	41
Zbiory wektorów	41
Ważona kombinacja liniowa	42
Niezależność liniowa	43
Matematyka związana z niezależnością liniową	44
Niezależność a wektor zerowy	45
Podprzestrzeń i rozpinanie	46
Baza	48
Definicja bazy	51
Podsumowanie	52
Ćwiczenia z programowania	52
4. Zastosowania wektorów	54
Korelacja i podobieństwo cosinusowe	54
Filtrowanie szeregów czasowych i wykrywanie cech	56
Klasteryzacja za pomocą algorytmu k-średnich	57
Ćwiczenia z programowania	60
Ćwiczenia z korelacji	60
Ćwiczenia z filtrowania i wykrywania cech	62
Ćwiczenia z algorytmu k-średnich	63
5. Macierze — część I	64
Tworzenie i wizualizowanie macierzy w NumPy	64
Wizualizowanie, indeksowanie i slicing	64
Specjalne macierze	66
Matematyka macierzy: dodawanie, mnożenie przez skalar i iloczyn Hadamarda	68
Dodawanie i odejmowanie	68
„Przesuwanie” macierzy	68
Mnożenie przez skalar i iloczyn Hadamarda	69
Standardowe mnożenie macierzy	70
Kiedy można pomnożyć przez siebie dwie macierze?	70
Mnożenie macierzy	71
Mnożenie macierz – wektor	72

Operacje na macierzach: transpozycja	74
Iloczyn skalarny i iloczyn zewnętrzny — notacja	75
Operacje na macierzach: LIVE EVIL (kolejność operacji)	75
Macierze symetryczne	75
Tworzenie macierzy symetrycznych z macierzy niesymetrycznych	76
Podsumowanie	77
Ćwiczenia z programowania	78
6. Macierze — część II	82
Normy macierzowe	82
Ślad macierzy i norma Frobeniusa	84
Przestrzenie macierzowe (kolumnowa, wierszowa, jądro)	84
Przestrzeń kolumnowa	84
Przestrzeń wierszowa	88
Jądro	88
Rząd	91
Rzędy specjalnych macierzy	93
Rząd a dodawanie i mnożenie macierzy	95
Rząd a przesuwanie macierzy	95
Teoria a praktyka	96
Zastosowania rzędu	97
Czy wektor znajduje się w przestrzeni kolumnowej macierzy?	97
Niezależność liniowa zbioru wektorów	98
Wyznacznik	99
Obliczanie wyznacznika	100
Wyznacznik a zależność liniowa	101
Wielomian charakterystyczny	101
Podsumowanie	103
Ćwiczenia z programowania	104
7. Zastosowania macierzy	109
Wielowymiarowe macierze kowariancji danych	109
Transformacje geometryczne za pomocą mnożenia macierz – wektor	112
Wykrywanie cech na obrazie	115
Podsumowanie	118
Ćwiczenia z programowania	119
Ćwiczenia z macierzy kowariancji i korelacji	119
Ćwiczenia z transformacji geometrycznych	120
Ćwiczenia z wykrywania cech w obrazach	122

8. Odwracanie macierzy	124
Odwrotność macierzy	124
Rodzaje odwrotności i warunki odwracalności	125
Obliczanie odwrotności	125
Odwrotność macierzy 2×2	126
Odwrotność macierzy diagonalnej	128
Odwracanie dowolnej macierzy kwadratowej o pełnym rzędzie	128
Odwrotności jednostronne	129
Unikalność odwrotności	132
Pseudoodwrotność Moore'a-Penrose'a	132
Stabilność numeryczna obliczania odwrotności	133
Geometryczna interpretacja odwrotności	135
Podsumowanie	136
Ćwiczenia z programowania	137
9. Macierze ortogonalne i rozkład QR	140
Macierze ortogonalne	140
Ortogonalizacja Grama-Schmidta	142
Rozkład QR	142
Wymiary Q i R	144
Rozkład QR i obliczanie odwrotności	145
Podsumowanie	146
Ćwiczenia z programowania	146
10. Przekształcenie do macierzy schodkowej i rozkład LU	151
Układy równań	151
Przekształcanie równań w macierze	152
Praca z równaniami macierzowymi	153
Sprowadzanie macierzy do postaci schodkowej	154
Eliminacja Gaussa	156
Eliminacja Gaussa-Jordana	157
Odwracanie macierzy za pomocą eliminacji Gaussa-Jordana	158
Rozkład LU	160
Zamiana wierszy za pomocą macierzy permutacji	160
Podsumowanie	162
Ćwiczenia z programowania	162
11. Ogólne modele liniowe i metoda najmniejszych kwadratów	165
Ogólne modele liniowe	166
Terminologia	166
Tworzenie ogólnego modelu liniowego	166

Dopasowywanie ogólnego modelu liniowego	167
Czy to rozwiązanie jest dokładne?	168
Metoda najmniejszych kwadratów — perspektywa geometryczna	169
Dlaczego metoda najmniejszych kwadratów działa?	170
Prosty przykład ogólnego modelu liniowego	172
Rozwiązywanie problemu najmniejszych kwadratów za pomocą rozkładu QR	176
Podsumowanie	177
Ćwiczenia z programowania	177
12. Zastosowania metody najmniejszych kwadratów	181
Przewidywanie liczby wypożyczonych rowerów na podstawie pogody	181
Tabela regresji z pakietu statsmodels	186
Współliniowość	187
Regularyzacja	187
Regresja wielomianowa	188
Znajdowanie parametrów modelu za pomocą przeszukiwania siatki	191
Podsumowanie	193
Ćwiczenia z programowania	194
Zbiór danych z informacjami o wypożyczaniu rowerów	194
Ćwiczenie ze współliniowości	195
Ćwiczenie z regularyzacji	196
Ćwiczenie z regresji wielomianowej	197
Ćwiczenia z przeszukiwania siatki	198
13. Rozkład według wartości własnych	199
Interpretacje wartości i wektorów własnych	200
Interpretacja geometryczna	200
Statystyka (analiza głównych składowych)	201
Redukcja szumów	201
Redukcja wymiarowości (kompresja danych)	202
Znajdowanie wartości własnych	203
Znajdowanie wektorów własnych	205
Znak i skala nieokreśloności wektorów własnych	206
Diagonalizacja macierzy kwadratowej	207
Wyjątkowość macierzy symetrycznych	208
Ortogonalne wektory własne	208
Rzeczywiste wartości własne	210
Rozkład według wartości własnych macierzy osobliwych	211
Forma kwadratowa, określoność i wartości własne	212
Forma kwadratowa macierzy	212
Określoność	214
$A^T A$ jest dodatnio (pół)określona	215

Uogólniony rozkład według wartości własnych	216
Podsumowanie	217
Ćwiczenia z programowania	218
14. Rozkład według wartości osobliwych	223
Spojrzenie na rozkład według wartości osobliwych z szerszej perspektywy	223
Wartości osobliwe i rzędy macierzy	225
Rozkład według wartości osobliwych w Pythonie	225
Rozkład według wartości osobliwych i „warstwy” macierzy rzędu 1.	226
Rozkład według wartości osobliwych z rozkładu według wartości własnych	228
Rozkład według wartości osobliwych $A^T A$	228
Zamiana wartości osobliwych na wariancję — wyjaśnienie	229
Współczynnik uwarunkowania	230
Rozkład według wartości osobliwych i pseudoodwrotność Moore’a-Penrose’a	231
Podsumowanie	232
Ćwiczenia z programowania	232
15. Zastosowania rozkładu według wartości własnych i rozkładu według wartości osobliwych	236
Analiza głównych składowych za pomocą rozkładów według wartości własnych i osobliwych	236
Matematyka analizy głównych składowych	237
Kroki algorytmu analizy głównych składowych	239
Analiza głównych składowych za pomocą rozkładu według wartości osobliwych	239
Liniowa analiza dyskryminacyjna	240
Aproksymacja macierzami niskiego rzędu za pomocą rozkładu według wartości osobliwych	242
Wykorzystanie rozkładu według wartości osobliwych do usuwania szumów	243
Podsumowanie	243
Ćwiczenia z programowania	244
Analiza głównych składowych	244
Liniowa analiza dyskryminacyjna	248
Aproksymacja macierzami niskiego rzędu za pomocą rozkładu według wartości osobliwych	252
Wykorzystanie rozkładu według wartości osobliwych do usuwania szumów z obrazu	255
16. Wprowadzenie do programowania w Pythonie	258
Dlaczego Python i jakie są alternatywy?	258
IDE (zintegrowane środowiska programistyczne)	259
Lokalny Python i Python dostępny w sieci	259
Praca z plikami kodu w Google Colab	260

Zmienne	261
Typy danych	262
Indeksowanie	263
Funkcje	264
Metody a funkcje	265
Tworzenie własnych funkcji	265
Biblioteki	266
NumPy	267
Indeksowanie i slicing w NumPy	267
Wizualizacje	268
Zamiana równań na kod	271
Formatowanie wyjścia i f-stringi	273
Przepływ sterowania	274
Operatory porównania	275
Klauzule if	275
Pętle for	277
Zagnieżdżone instrukcje kontrolne	277
Pomiar czasu obliczeń	278
Uzyskiwanie pomocy i więcej informacji	278
Co robić, gdy coś idzie nie tak	278
Podsumowanie	279
Skorowidz	281