
Spis treści

	Prolog	11
	Status matematyki	12
	Dziedziny tradycyjnej matematyki	13
	Metody tradycyjnej matematyki	15
	Zawartość tej książki	16
	Dla kogo jest ta książka	18
	 CZĘŚĆ I W STRONĘ KATEGORII	 21
1	Kategorie — idea	23
	1.1. Abstrakcja i analogie	25
	1.2. Połączenia i unifikacja	25
	1.3. Kontekst	26
	1.4. Relacje	26
	1.5. Bycie tym samym	27
	1.6. Charakteryzowanie rzeczy według roli, jaką pełnią	28
	1.7. Przybliżanie i oddalanie	29
	1.8. Ramy i techniki	30
2	Abstrakcja	32
	2.1. Czym jest matematyka?	32
	2.2. Logika i abstrakcja — bliźniacze dyscypliny	33
	2.3. Zapominanie szczegółów	34
	2.4. Zalety i wady	34
	2.5. Przekładanie analogii na rzeczywistość	36
	2.6. Różne abstrakcje tej samej rzeczy	37
	2.7. Abstrakcyjna podróż przez poziomy matematyki	39
3	Wzorce	43
	3.1. Matematyka jako wykrywanie wzorców	43
	3.2. Wzory jako analogie	45
	3.3. Wzory jako oznaki struktury	46

3.4.	Struktura abstrakcyjna jako rodzaj wzoru	48
3.5.	Abstrakcja pomaga nam dostrzegać wzorce	49
4	Kontekst	52
4.1.	Odległość	53
4.2.	Światy liczb	56
4.3.	Świat zerowy	58
5	Relacje	60
5.1.	Relacje rodzinne	61
5.2.	Symetria	62
5.3.	Arytmetyka	63
5.4.	Arytmetyka modularna	64
5.5.	Czworokąty	65
5.6.	Kraty czynników	68
6	Formalizmy	74
6.1.	Rodzaje turystów	74
6.2.	Dlaczego wyrażamy rzeczy w sposób formalny	75
6.3.	Przykład: przestrzenie metryczne	77
6.4.	Podstawy logiki	81
6.5.	Przykład: arytmetyka modularna	83
6.6.	Przykład: kraty czynników	87
7	Relacje równoważności	88
7.1.	Badanie równości	88
7.2.	Idea relacji abstrakcyjnych	89
7.3.	Zwrotność	90
7.4.	Symetria	92
7.5.	Przechodniość	94
7.6.	Relacje równoważności	96
7.7.	Przykłady z matematyki	98
7.8.	Ciekawe porażki	99
8	Kategorie — definicja	101
8.1.	Dane — obiekty i relacje	101
8.2.	Struktura — co możemy zrobić z danymi	102
8.3.	Własności — wymagania dotyczące konstrukcji	105
8.4.	Formalna definicja kategorii	108
8.5.	Problem rozmiaru	108
8.6.	Geometria łączności	109
8.7.	Rysowanie przydatnych diagramów	110
8.8.	Cel kompozycji	111

	INTERLUDIUM WYCIECZKA PO ŚWIECIE MATEMATYKI	115
9	Przykłady, które już pokazałam, ale nie wprost	117
	9.1. Symetria	118
	9.2. Relacje równoważności	118
	9.3. Czynniki pierwsze	120
	9.4. Systemy liczbowe	121
10	Zbiory uporządkowane	123
	10.1. Zbiór uporządkowany liniowo	123
	10.2. Zbiory częściowo uporządkowane	126
11	Małe struktury matematyczne	130
	11.1. Małe, możliwe do narysowania przykłady	130
	11.2. Monoidy	131
	11.3. Grupy	134
	11.4. Punkty i ścieżki	138
12	Zbiory i funkcje	141
	12.1. Funkcje	142
	12.2. Struktura — identyczności i kompozycja	147
	12.3. Własności — prawa jednostkowe i łączność	147
	12.4. Kategoria zbiorów i funkcji	148
13	Duże światy struktur matematycznych	150
	13.1. Monoidy	150
	13.2. Grupy	154
	13.3. Zbiory częściowo uporządkowane	156
	13.4. Przestrzenie topologiczne	160
	13.5. Kategorie	161
	13.6. Macierze	163
	CZĘŚĆ II UPRAWIANIE TEORII KATEGORII	167
14	Izomorfizmy	169
	14.1. Bycie tym samym	169
	14.2. Odwracalność	171
	14.3. Izomorfizmy w kategorii	173
	14.4. Traktowanie obiektów izomorficznych jako takich samych	175
	14.5. Izomorfizmy zbiorów	177
	14.6. Izomorfizmy dużych struktur	180
	14.7. Inne zagadnienia dotyczące izomorfizmów	187

15	Moniki i epiki	189
	15.1. Asymetria funkcji	190
	15.2. Iniekcje i surjekcje	191
	15.3. Moniki — kategorialne iniekcje	196
	15.4. Epiki — kategorialne surjekcje	199
	15.5. Związki z izomorfizmami	203
	15.6. Monoidy	204
	15.7. Inne zagadnienia	205
16	Własności uniwersalne	207
	16.1. Rola a charakter	207
	16.2. Skrajności	209
	16.3. Definicja formalna	210
	16.4. Unikalność	212
	16.5. Obiekty końcowe	214
	16.6. Sposoby na porażkę	215
	16.7. Przykłady	219
	16.8. Kontekst	223
	16.9. Inne zagadnienia	225
17	Dualność	227
	17.1. Obracanie strzałek	227
	17.2. Kategoria dualna	229
	17.3. Moniki i epiki	231
	17.4. Obiekty początkowe i końcowe	234
	17.5. Alternatywna definicja kategorii	234
18	Produkty i koprodukty	237
	18.1. Idea produktów w kategorii	237
	18.2. Definicja formalna	238
	18.3. Produkty jako obiekty końcowe	240
	18.4. Produkty w Set	243
	18.5. Unikalność produktów w Set	246
	18.6. Produkty w kategorii zbiorów częściowo uporządkowanych	250
	18.7. Kategoria zbiorów częściowo uporządkowanych	252
	18.8. Monoidy i grupy	257
	18.9. Niektóre kluczowe morfizmy indukowane przez produkty	260
	18.10. Dualność — koprodukty	260
	18.11. Koprodukty w Set	261
	18.12. Dekategoryfikacja — związki z arytmetyką	263
	18.13. Koprodukty w innych kategoriach	264
	18.14. Inne zagadnienia	266

19	Pullbacki i pushouty	268
	19.1. Pullbacki	268
	19.2. Pullbacki w Set	271
	19.3. Pullbacki jako obiekty końcowe w jakiejś kategorii	273
	19.4. Przykład: definiowanie kategorii za pomocą pullbacków	274
	19.5. Pojęcie dualne — pushout	276
	19.6. Pushouty w Set	277
	19.7. Pushouty w topologii	283
	19.8. Inne zagadnienia	284
20	Funktory	287
	20.1. Tworzenie definicji	287
	20.2. Funktory pomiędzy małymi przykładami	289
	20.3. Funktory z małych, możliwych do narysowania kategorii	291
	20.4. Funktory wolne i zapominania	294
	20.5. Zachowanie i odzwierciedlanie struktury	298
	20.6. Inne zagadnienia	301
21	Kategorie kategorii	305
	21.1. Kategoria Cat	305
	21.2. Kategorie końcowe i początkowe	309
	21.3. Produkty i koprodukty kategorii	309
	21.4. Izomorfizmy kategorii	312
	21.5. Funktory pełne oraz wierne	317
22	Transformacje naturalne	323
	22.1. Definicja na podstawie naszych intuicji	323
	22.2. Uwaga na temat homotopii	325
	22.3. Kształt	326
	22.4. Kategorie funktorów	326
	22.5. Diagramy i stożki nad diagramami	328
	22.6. Izomorfizmy naturalne	330
	22.7. Równoważność kategorii	332
	22.8. Przykłady równoważności dużych kategorii	337
	22.9. Kompozycja pozioma	338
	22.10. Wymiennność	341
	22.11. Połączenie tego wszystkiego w jedną całość	344
23	Yoneda	345
	23.1. Radość z Yonedy	345
	23.2. Ponowne spojrzenie na bycie tym samym	346
	23.3. Funktory reprezentowalne	348
	23.4. Osadzenie Yonedy	351
	23.5. Lemat Yonedy	358
	23.6. Inne zagadnienia	359

24	Wyższe wymiary	361
	24.1. Dlaczego wyższe wymiary?	361
	24.2. Bezpośrednia definicja 2-kategorii	363
	24.3. Powtórne spojrzenie na homsety	364
	24.4. Od grafów bazowych do 2-grafów	367
	24.5. Kategorie monoidalne	370
	24.6. Ścisłość kontra słabość	372
	24.7. Spójność	375
	24.8. Degeneracja	377
	24.9. n i nieskończoność	381
	24.10. Morał z tej historii	386
	Epilog. Myślenie kategorialne	388
	 DODATKI	 393
	Dodatek A. Alfabety	395
	Dodatek B. Podstawy logiki	396
	Dodatek C. Podstawy teorii mnogości	397
	Dodatek D. Podstawy przestrzeni topologicznych	399
	 <i>Słowniczek</i>	 402
	<i>Literatura</i>	408
	<i>Podziękowania</i>	410