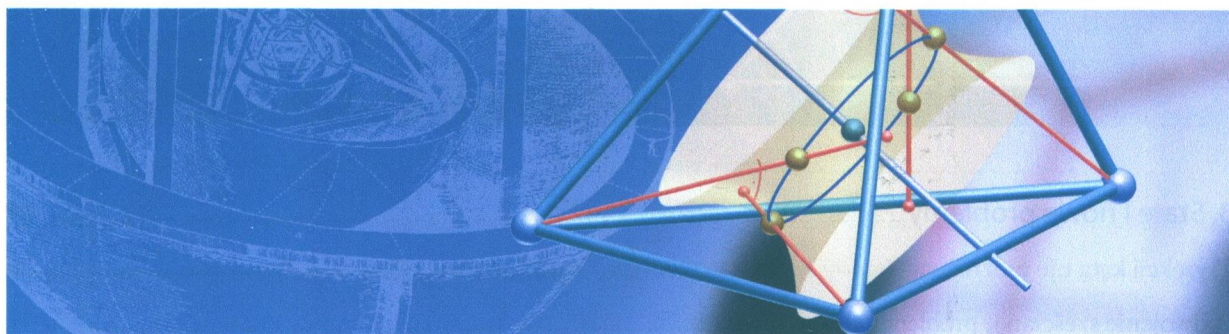


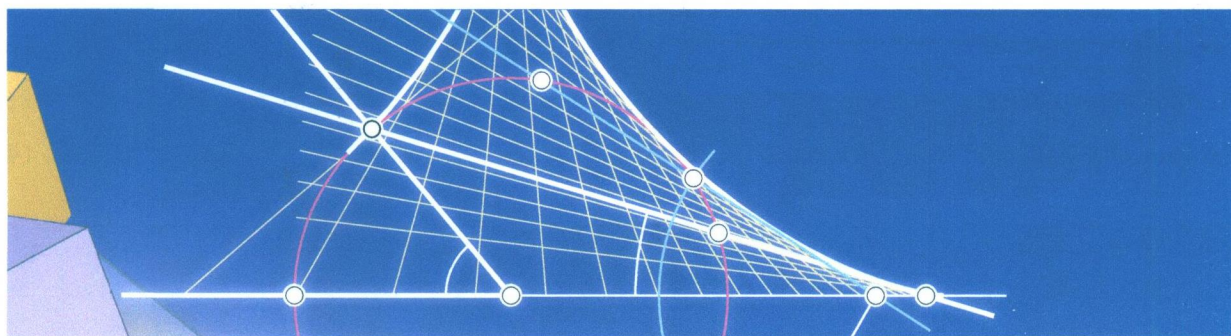
Spis treści

Wprowadzenie	V
1. Modele wielościenne	1
Bryły platońskie	2
Dualność i symetria	4
Bryły archimedesowe	6
Bryły Johnsona i Catalana	8
Geometria piłki nożnej. <i>Symetria kuli</i>	10
Specjalny czworościan z przystającymi ścianami bocznymi	12
Regulus wysokości. <i>Przestrzenny odpowiednik punktu przecięcia wysokości</i>	13
Sztuka rozkładania	14

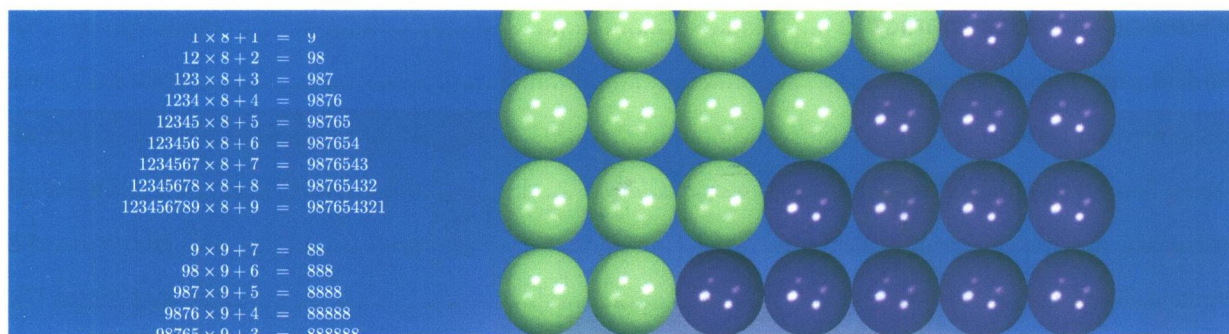


2. Geometria na płaszczyźnie	17
Twierdzenie Pitagorasa	18
Dziewięciopunktowy okrąg Feuerbacha	20
Koła koncentryczne <i>wokół środka okręgu wpisanego w trójkąt</i>	21
Skale metryczne i rzutowe <i>od stosunku częściowego do podwójnego</i>	22
Punkt Fermata. <i>Minimalna odległość trzech punktów</i>	23

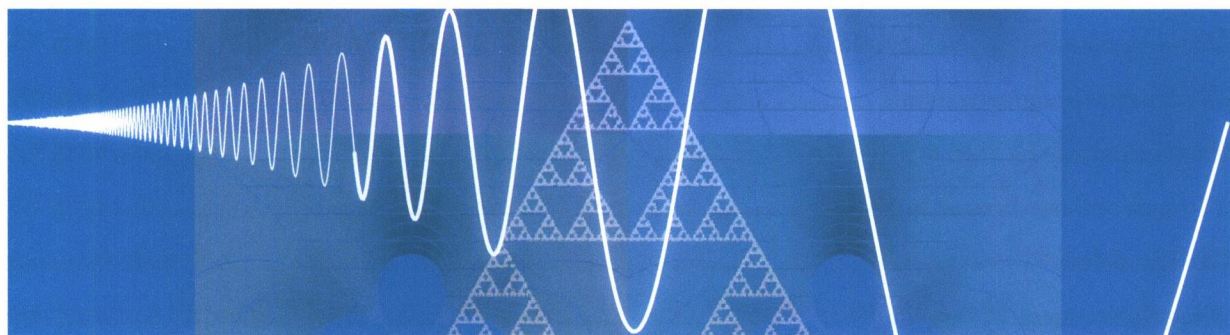
Twierdzenie Morleya <i>mogłoby pochodzić od Euklidesa</i>	24
Twierdzenie Fukuty i Čerina. <i>Każdy trójkąt ma swój własny sześciokąt foremny</i>	25
Problemy Maclaurina-Braikenridge'a. <i>Problemy z zamknięciem w n-tym wierzchołku</i>	26
Wyprowadzenie wzorów na sumy. <i>Sumy w trójkącie</i>	28
Wpisane kwadraty. <i>Jeden kwadrat w każdej zamkniętej krzywej</i>	30
... i trójkąty równoboczne	31
Podział powierzchni trójkąta na pół <i>przy minimalnej długości cięcia</i>	32
Czy każdy kąt jest kątem prostym? <i>Zdarza się, że nasz wzrok zwodzi nas nawet na płaszczyźnie</i>	33



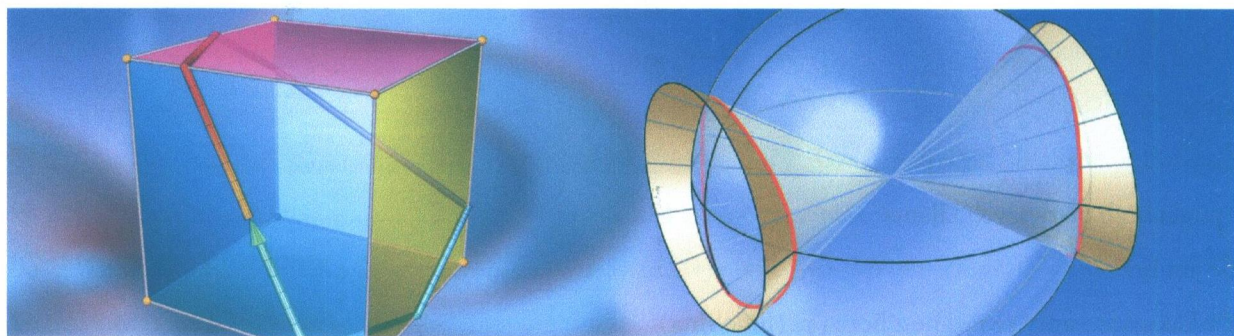
3. Stare i nowe problemy	35
Trysekcji kąta nie można <i>wykonać za pomocą cyrkla i linijki</i>	36
Podwojenie sześcianu, problem delijski	37
Tales i Pitagoras w przestrzeni kosmicznej. <i>Uogólnienia: jak to zrobić?</i>	38
Hipoteza Collatza. <i>Czy algorytm rekurencyjny kończy działanie?</i>	40
Domino na szachownicy. <i>Niektóre dowody są równie proste, co pomysłowe</i>	42
Kanapka z szynką. <i>Jak dzielić się sprawiedliwie?</i>	43
Twierdzenie Picka. <i>Powierzchnia wielokątów siatki</i>	44
Hipoteza Goldbacha. <i>„Każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych”</i>	45
Funkcja zeta Riemanna <i>w połączeniu z liczbami pierwszymi</i>	46



4. Wzory i liczby	49
Wzór Gaussa na sumę	50
Suma kwadratów. <i>Niewielkie zapożyczenie z mechaniki</i>	51
Sumowanie ułamków <i>i radość dowodu</i>	53
Trójkąt Pascala <i>pod specjalną lupą</i>	54
Pascal i Fibonacciego. <i>Niezwykłe korelacje</i>	56
Piramidy Pascala <i>o współczynnikach trójkątowych</i>	57
Szacowanie rozkładu liczb pierwszych. <i>Twierdzenie o liczbach pierwszych</i>	58
Spirala liczb pierwszych Ulama. <i>Wzory liczbowe z liczbami pierwszymi</i>	59
Ile jest liczb? <i>O przeliczalności i nieprzeliczalności</i>	60
Zaskakujące wzory związane z liczbą pi (ludolfiną) <i>zajmowały największych matematyków</i>	62

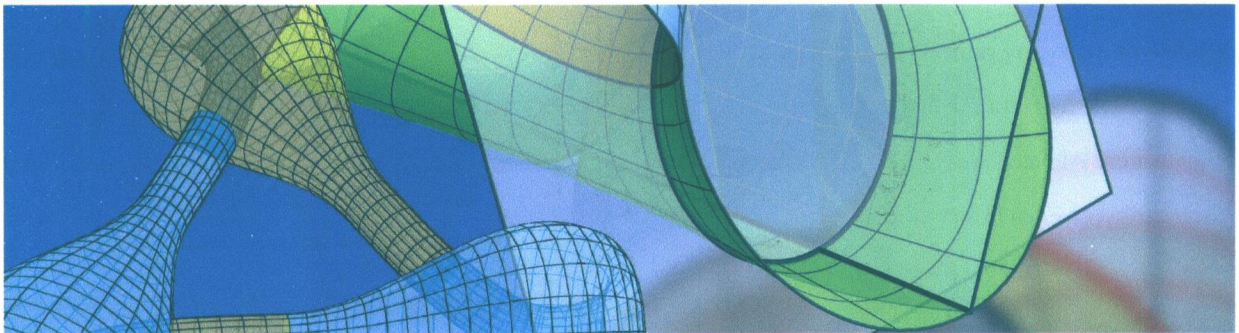


5. Funkcje i wartości graniczne	65
Funkcje nieróżniczkowalne	66
Rozwinięcie w szereg Taylora	68
Szereg Fouriera, sygnały okresowe <i>i kodowanie sygnałów</i>	70
Różniczka zupełna i pochodne cząstkowe. <i>Geometrycznie łatwe do zrozumienia</i>	71
Funkcja eliptyczna $\wp$ Weierstrassa	72
... i jej pochodna	73
Solitony. <i>Nieliniowe fale o stabilnym kształcie</i>	74
Objętość kuli. <i>Z perspektywy syntetycznej starożytnych Greków</i>	76
... i wydrążona kula. <i>Równość objętości</i>	77
Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym. <i>Jakby nic się nie stało</i>	78



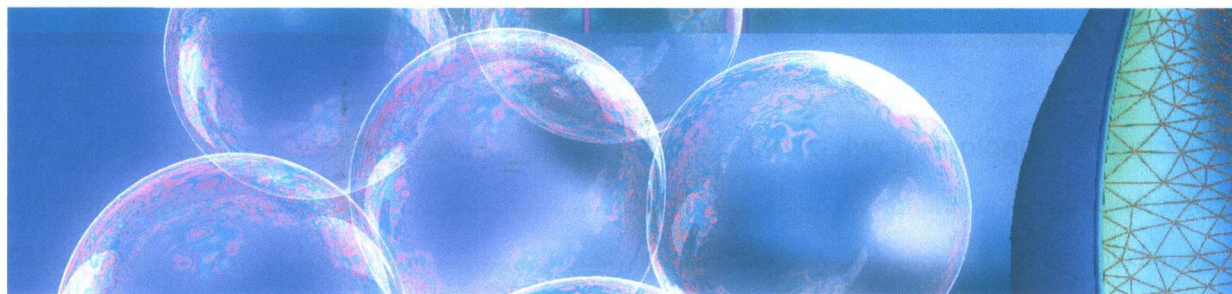
6. Krzywe i węzły	81
Krzywe stożkowe – na płaszczyźnie	82
... i zdefiniowane przestrzennie	83
Krzywe stożkowe na kuli. <i>Konstrukcja prawie jak na płaszczyźnie</i>	84
... i współśrodkowe krzywe stożkowe	85
Kule Dandolina. <i>Genialny dowód</i>	86
Okrąg Apoloniusza. <i>Proporcje odległości</i>	87

Krzywe sześciennne	88
Ował Cassiniego	90
Asteroida	91
Konchoidy. <i>Wzajemne oddziaływanie wymiarów</i>	92
Krzywe geodezyjne	94
... i najprostsze linie	95
Powierzchnia Zolla. <i>Wszystkie geodezyjne są zamknięte</i>	96
Geodezyjne na wielościanach	98
Topologia węzłów	100
Węzły celtyckie	102
Pierścienie boromejskie <i>trzymają się razem</i>	104
Krzywe Béziera i funkcje sklepane	106



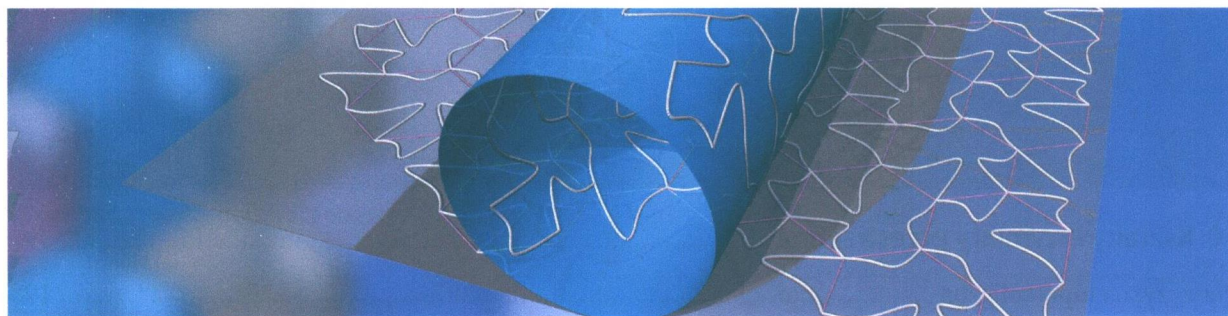
7. Geometria i topologia powierzchni	109
Hiperboloidy	110
... i paraboloidy	111
Kwadryki. <i>Prototypy dla wszystkich zakrzywionych powierzchni</i>	112
... i przekroje kołowe	113
Powierzchnia Clebscha. <i>Zbiór zer z dokładnie 27 liniami prostymi</i>	114

... osobliwe powierzchnie sześciennie. <i>Rozwiązania podwójne i zespolone</i>	115
Cyklidy Dupina	116
Supercyklidy. <i>Krzywe stożkowe, gdziekolwiek spojrzeć</i>	118
Konoida Plückera. <i>Wygenerowana przez odwrócenie harmoniczne</i>	119
Śruby i spirale. <i>Przystawanie i podobieństwo</i>	120
Rotoidalne powierzchnie helikoidalne	123
Powierzchnie kołnierzone. <i>Odwracanie „kołnierza” z papieru</i>	124
... i rozwijalne paski	125
Pseudosfera oraz powierzchnie obrotowe o stałej krzywiznie	126
Powierzchnie Kuena i inne powierzchnie pseudosferyczne	128
Torus Császára. <i>Torus wielościenne z minimalną liczbą wierzchołków</i>	130
Wstęga Möbiusa	132
Butelka Kleina	134
Modele płaszczyzny rzutowej	136
Powierzchnie Seiferta. <i>Orientowalne powierzchnie wplecione w węzły</i>	138
Rogata sfera Alexandera	140
Nicowanie (ewersja) sfery <i>udaje się w przypadku powierzchni matematycznych</i>	142



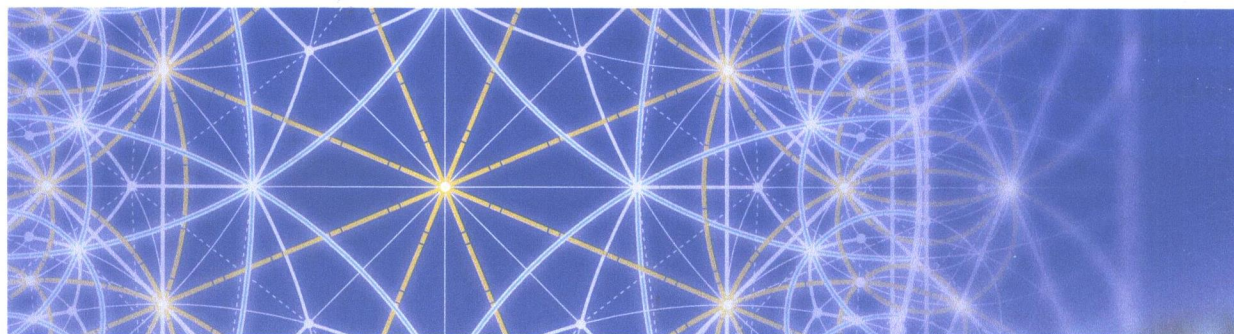
8. Minimalne powierzchnie i bańki mydlane	145
Minimalne powierzchnie i bańki mydlane	146

Klasyczne powierzchnie minimalne	148
Problem Gergonne'a <i>oraz rozwiązania Scherka i Schwarza</i>	150
Od katenoidy do helikoidy	152
Katenoida i jej odmiany	154
Okresowe powierzchnie minimalne	156
Powierzchnia Costy	158
Dyskretne powierzchnie minimalne. <i>Błony mydlane tworzone z płaskich płytek</i>	160
Latarnia Schwarza	162
Powierzchnie z wzorów kołowych	164
Torus Wente'a	166
Zamknięte bańki mydlane	168
Penta powierzchnia	170



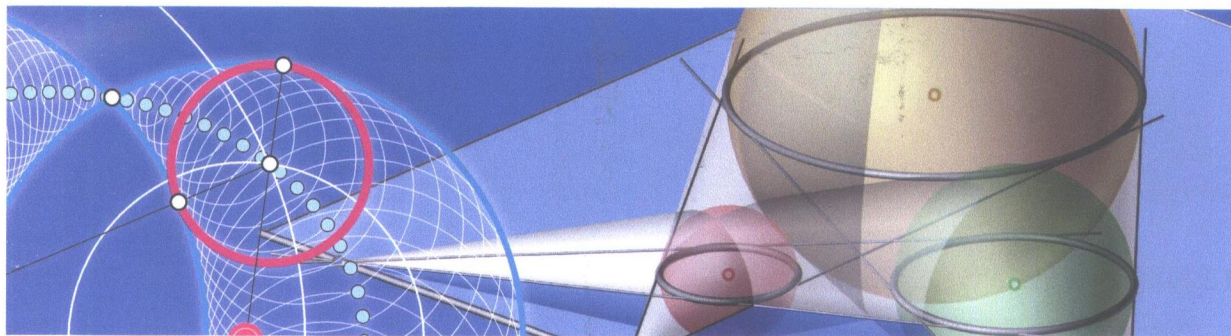
9. Parkiety i pakiety	173
Ornamenty pasowe (fryzy). <i>Istnieje dokładnie siedem podstawowych typów</i>	174
Ornamentyka. <i>Parkietaż</i>	176
17 płaskich grup symetrii	177
Parkietaże nieokresowe	180
Parkietaż Penrose'a	181
Liczba pocałunków	183

Wypełnianie przestrzeni. <i>Platońskie czy archimedesowe?</i>	184
Pianka Weaire’a-Phelana	186
... i optymalne pakiety przestrzenne	187
Przeplatające się powierzchnie... ..	188
... i połączone otwory	189
Płaskie diagramy Woronoja. <i>Układanie płaszczyzny za pomocą wypukłych komórek</i>	190
Diagramy przestrzenne Woronoja i <i>triangulacja Delaunaya</i>	192
Tablice grupowe. <i>Przekształcenia symetryczne grup diedralnych</i>	194
... i specjalne podgrupy	195

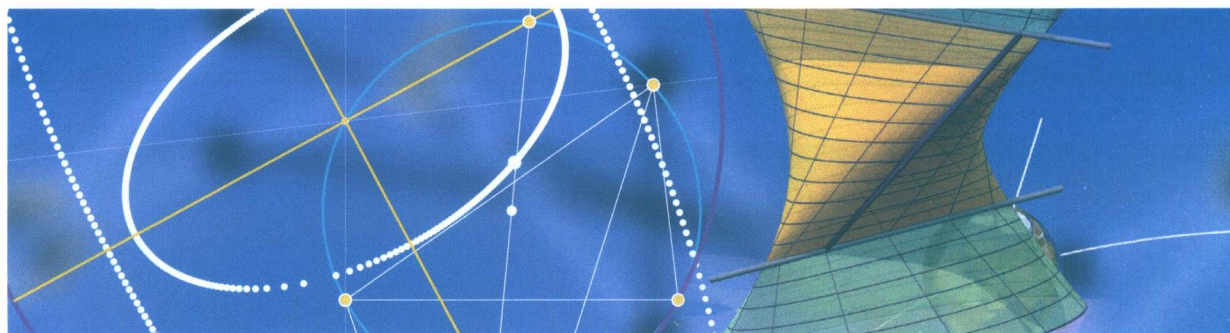


10. Kształty i wymiary przestrzenne	197
Płaszczyzna hiperboliczna	198
Hiperboliczna płaszczyzna Eschera. <i>Modele konforemne płaszczyzny hiperbolicznej</i>	200
Perły Indry. <i>Wypełnienie za pomocą okręgów na płaszczyźnie hiperbolicznej</i>	202
Idealny wielościan	204
... w przestrzeni hiperbolicznej	205
Kształt pomieszczenia. <i>Czy mogą istnieć inne światy?</i>	206
Czterowymiarowy sześciąt. <i>Krok do zrozumienia wyższych wymiarów</i>	208
... i jego reprezentacja graficzna	209

Hiperdwunastościan <i>ze 120 komórek</i>	210
120 komórek i więcej!	212



11. Grafy i incydencje	215
Twierdzenie Pascala	216
... i jego dualny odpowiednik	217
Twierdzenie Desarguesa. <i>Podstawa geometrii rzutowej</i>	218
Okręgi styczne. <i>Problem okręgów Apoloniusza</i>	220
Przejście w przestrzeń	222
Układy krzywych definiują obszary. <i>Ale ile ich jest?</i>	223
Graf Petersena	224
Cykl Hamiltona i <i>„Icosian game”</i>	226
... i cykl Eulera i <i>mosty królewieckie</i>	227
Diagramy Venna	228
Diagramy Schlegela. <i>Cienie wielokomórek</i>	230
Minimalne drzewa rozpinające	232
Zliczanie triangulacji	234



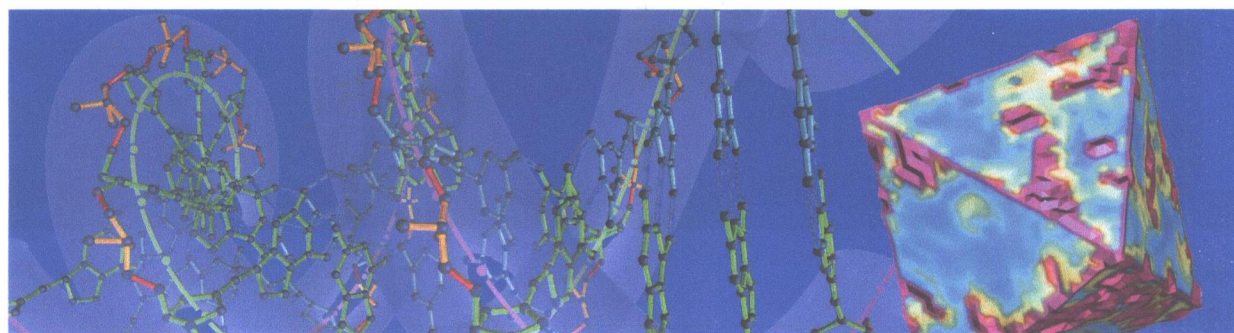
12. Ruchome kształty	237
Ruch eliptyczny. <i>Prosty wymuszony ruch, który odbywa się również w przestrzeni</i>	238
Ruchome wielościany. <i>Przebijające się złącza</i>	239
Trajektorie i powierzchnie obwiedni <i>dla ruchów przestrzennych</i>	240
Wymuszone ruchy przestrzenne <i>na przykładzie obrotu oloidu</i>	241
Stopnie swobody. <i>I wciąż się porusza!</i>	242
Toczący się trójkąt Reuleaux. <i>Co można przekręcić i obrócić... ..</i>	244
Gömböc. <i>Wańka-wstańka bez ukrytego ciężarka</i>	245
 13. Zbiory fraktalne	 247
Drzewo pitagorejskie	248
Wypełnienie płaszczyzny i przestrzeni	250
... krzywą zamkniętą	251
Krzywe Hilberta na kuli	252
Wymiar fraktalny	253
Gąbka Mengera	254
Zbiór Julii	256
... i zbiór Mandelbrota	257
Diagram Feigenbauma <i>oraz struktura zbioru Mandelbrota</i>	258

Atraktor Lorenza. <i>Jakby przyciągany magnetycznie</i>	260
Fraktale krzywoliniowe. <i>Wzór z krzywych zwijających się</i>	262
Błądzenie przypadkowe. <i>Wędrówki, które zawsze prowadzą do celu</i>	264
Perkolacja. <i>Kiedy coś zaczyna wyciekać?</i>	268



14. Mapy i odwzorowania	271
Mapy izometryczne <i>są niemożliwe, ale...</i>	272
Odwzorowanie gnomoniczne. <i>Najkrótsze odległości są prostoliniowe</i>	274
... lub stereograficzne. <i>Dokładność kątowna i kołowa</i>	275
Inwersja i rzut	276
Zarys kuli. <i>Obserwator oczekuje, że zarys kuli będzie okręgiem</i>	277
Przekształcenia Möbiusa	278
...z ruchów kuli	279
Twierdzenie Riemanna o odwzorowaniu. <i>Odwzorowania konforemne z okrągłymi wypełnieniami</i>	280
Odwzorowanie Schwarza–Christoffela. <i>Siatki ortogonalne na płaszczyźnie</i>	282
Parametryzacja powierzchni. <i>Przekształcenie siatek trójkątnych w siatki kwadratowe</i>	284
Kolineacja przestrzenna. <i>Liniiowa transformacja przestrzeni 3D na siebie</i>	286
Miejsca zerowe funkcji zespolonych. <i>Część rzeczywista i urojona</i>	288
Sfera Riemanna i podstawowe twierdzenie algebry	289

Kolorowanie powierzchni	290
... i powierzchnie Riemanna	292
Rozwinięcie w szereg funkcji wykładniczej	293
Krzywa Szegö	294
Polinomiografia <i>mieszanka matematyki i sztuki</i>	295
Miejsca zerowe wielomianów <i>na płaszczyźnie zespolonej</i>	296



15. Formy i procesy w przyrodzie i technice	299
Liczby w ruchu	300
Ścieżka wirowa Kármána	302
Topologia przepływów	304
Udoskonalone metody. <i>Wizualizacja równań różniczkowych</i>	306
Linie pola elektrycznego. <i>Wizualizacja cząsteczek</i>	308
Wygładzanie danych ze skanera 3D	310
Wibracje. <i>Nie słyszać kształtu bębnow!</i>	312
Problem komiwojażera ... <i>i planowanie podróży</i>	314
Problem pakowania. <i>Ile pudełek mieści się w kontenerze?</i>	316
Sortowanie. <i>Często używane i różniące się wydajnością</i>	318
Podwójna nić DNA. <i>Miliardy elementów składowych wzdłuż dwóch linii śrubowych</i>	321

Wirtualna chirurgia szczękowo-twarzowa. <i>Planowanie operacji na komputerze</i>	322
Promienie w szkicach <i>Ernst Haeckel</i>	324
Geometria epipolarna. <i>Rekonstrukcja przy użyciu wielu obrazów</i>	326
Od zdjęcia do sytuacji przestrzennej. <i>Rekonstrukcja na podstawie pojedynczego obrazu?</i>	327
Odbicia	328
Wykaz ilustracji	330
Indeks	334