

## SPIS TREŚCI

|                                                                               |    |
|-------------------------------------------------------------------------------|----|
| Przedmowa .....                                                               | 9  |
| VIII. <u>Całka oznaczona</u> .....                                            | 11 |
| 1. Definicja całki oznaczonej i jej podstawowe<br>własności .....             | 11 |
| 2. Dwa podstawowe twierdzenia rachunku całkowego<br>Zadania przykładowe ..... | 14 |
| Zadania do rozwiązania .....                                                  | 15 |
| Odpowiedzi .....                                                              | 16 |
| 3. Zamiana zmiennej w całce oznaczonej .....                                  | 17 |
| Zadania przykładowe .....                                                     | 18 |
| Zadania do rozwiązania .....                                                  | 21 |
| Odpowiedzi .....                                                              | 22 |
| 4. Całka niewłaściwa .....                                                    | 23 |
| Zadania przykładowe .....                                                     | 25 |
| Zadania do rozwiązania .....                                                  | 29 |
| Odpowiedzi .....                                                              | 30 |
| 5. Obliczanie pola obszaru płaskiego .....                                    | 31 |
| Zadania przykładowe .....                                                     | 31 |
| Zadania do rozwiązania .....                                                  | 34 |
| Odpowiedzi .....                                                              | 35 |
| 6. Obliczanie długości łuku krzywej .....                                     | 35 |
| Zadania przykładowe .....                                                     | 37 |
| Zadania do rozwiązania .....                                                  | 41 |
| Odpowiedzi .....                                                              | 43 |
| 7. Obliczanie objętości oraz pola powierzchni brył<br>obrotowych .....        | 43 |
| Zadania przykładowe .....                                                     | 44 |
| Zadania do rozwiązania .....                                                  | 47 |
| Odpowiedzi .....                                                              | 47 |

|                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------|-----|
| IX. Szeregi liczbowe nieskończone .....                              | 49  |
| 1. Podstawowe pojęcia .....                                          | 49  |
| Zadania przykładowe .....                                            | 51  |
| Zadania do rozwiązania .....                                         | 56  |
| Odpowiedzi .....                                                     | 57  |
| 2. Kryterium porównawcze zbieżności (rozbieżności) szeregów .....    | 59  |
| Zadania przykładowe .....                                            | 61  |
| Zadania do rozwiązania .....                                         | 70  |
| Odpowiedzi .....                                                     | 71  |
| 3. Kryterium d'Alemberta i Cauchy'ego .....                          | 72  |
| Zadania przykładowe .....                                            | 73  |
| Zadania do rozwiązania .....                                         | 78  |
| Odpowiedzi .....                                                     | 79  |
| 4. Kryterium całkowite zbieżności .....                              | 80  |
| Zadania przykładowe .....                                            | 80  |
| Zadania do rozwiązania .....                                         | 83  |
| Odpowiedzi .....                                                     | 83  |
| 5. Szeregi o wyrazach dowolnych .....                                | 83  |
| Zadania przykładowe .....                                            | 85  |
| Zadania do rozwiązania .....                                         | 87  |
| Odpowiedzi .....                                                     | 87  |
| 6. Szeregi naprzemienne .....                                        | 87  |
| Zadania przykładowe .....                                            | 88  |
| Zadania do rozwiązania .....                                         | 91  |
| Odpowiedzi .....                                                     | 92  |
| X. Ciągi i szeregi funkcyjne .....                                   | 93  |
| 1. Szereg funkcyjny i jego obszar zbieżności .....                   | 93  |
| Zadania przykładowe .....                                            | 94  |
| Zadania do rozwiązania .....                                         | 97  |
| Odpowiedzi .....                                                     | 97  |
| 2. Zbieżność jednostajna ciągu i szeregu funkcyjnego .....           | 98  |
| Zadania przykładowe .....                                            | 98  |
| Zadania do rozwiązania .....                                         | 100 |
| Odpowiedzi .....                                                     | 100 |
| 3. Pewne własności szeregów funkcyjnych jednostajnie zbieżnych ..... | 100 |

|                                                    |     |
|----------------------------------------------------|-----|
| Zadania przykładowe .....                          | 102 |
| Zadania do rozwiązania .....                       | 104 |
| Odpowiedzi .....                                   | 104 |
| 4. Szeregi potęgowe i ich promień zbieżności ..... | 104 |
| Zadania przykładowe .....                          | 106 |
| Zadania do rozwiązania .....                       | 109 |
| Odpowiedzi .....                                   | 110 |
| 5. Podstawowe własności szeregów potęgowych .....  | 110 |
| 6. Szereg Taylora i Maclaurina .....               | 111 |
| Zadania przykładowe .....                          | 115 |
| Zadania do rozwiązania .....                       | 123 |
| Odpowiedzi .....                                   | 124 |
| 7. Szeregi Fouriera .....                          | 126 |
| Zadania przykładowe .....                          | 132 |
| Zadania do rozwiązania .....                       | 139 |
| Odpowiedzi .....                                   | 140 |

## XI. Funkcje dwu i wielu zmiennych ..... 143

|                                                                                               |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Definicja funkcji dwu i wielu zmiennych. Pole czy-<br>li obszar określoności funkcji ..... | 143 |
| Zadania przykładowe .....                                                                     | 145 |
| Zadania do rozwiązania .....                                                                  | 147 |
| Odpowiedzi .....                                                                              | 147 |
| 2. Granica i ciągłość funkcji $z = f(x, y)$ .....                                             | 148 |
| Zadania przykładowe .....                                                                     | 150 |
| Zadania do rozwiązania .....                                                                  | 152 |
| Odpowiedzi .....                                                                              | 153 |
| 3. Pochodne cząstkowe i pochodna w kierunku. Zmia-<br>na zmiennych niezależnych .....         | 153 |
| Zadania przykładowe .....                                                                     | 159 |
| Zadania do rozwiązania .....                                                                  | 171 |
| Odpowiedzi .....                                                                              | 174 |
| 4. Różniczka zupełna i jej zastosowania .....                                                 | 177 |
| Zadania przykładowe .....                                                                     | 179 |
| Zadania do rozwiązania .....                                                                  | 186 |
| Odpowiedzi .....                                                                              | 187 |
| 5. Ekstrema lokalne funkcji dwu zmiennych niezależ-<br>nych .....                             | 188 |
| Zadania przykładowe .....                                                                     | 190 |

|                                                                                          |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Zadania do rozwiązania .....                                                             | 194        |
| Odpowiedzi .....                                                                         | 195        |
| 6. Największa i najmniejsza wartość funkcji .....                                        | 196        |
| Zadania przykładowe .....                                                                | 198        |
| Zadania do rozwiązania .....                                                             | 203        |
| Odpowiedzi .....                                                                         | 203        |
| 7. Pochodne i ekstrema lokalne funkcji uwikłanej da-<br>nej równaniem $F(x,y) = 0$ ..... | 204        |
| Zadania przykładowe .....                                                                | 207        |
| Zadania do rozwiązania .....                                                             | 211        |
| Odpowiedzi .....                                                                         | 213        |
| <u>XII. Całka podwójna .....</u>                                                         | <u>215</u> |
| 1. Całka podwójna w obszarze regularnym .....                                            | 215        |
| 2. Całka podwójna w obszarze normalnym .....                                             | 217        |
| 3. Wyznaczanie granic całkowania w całce podwójnej..                                     | 220        |
| Zadania przykładowe .....                                                                | 220        |
| Zadania do rozwiązania .....                                                             | 228        |
| Odpowiedzi .....                                                                         | 229        |
| 4. Obliczanie całek podwójnych .....                                                     | 231        |
| Zadania przykładowe .....                                                                | 231        |
| Zadania do rozwiązania .....                                                             | 236        |
| Odpowiedzi .....                                                                         | 237        |
| 5. Zamiana zmiennych w całce podwójnej .....                                             | 238        |
| Zadania przykładowe .....                                                                | 241        |
| Zadania do rozwiązania .....                                                             | 247        |
| Odpowiedzi .....                                                                         | 249        |
| 6. Obliczanie pól obszarów płaskich .....                                                | 249        |
| Zadania przykładowe .....                                                                | 249        |
| Zadania do rozwiązania .....                                                             | 253        |
| Odpowiedzi .....                                                                         | 254        |
| 7. Obliczanie objętości obszarów przestrzennych ....                                     | 254        |
| Zadania przykładowe .....                                                                | 254        |
| Zadania do rozwiązania .....                                                             | 259        |
| Odpowiedzi .....                                                                         | 260        |
| 8. Obliczanie pola powierzchni .....                                                     | 260        |
| Zadania przykładowe .....                                                                | 261        |
| Zadania do rozwiązania .....                                                             | 267        |
| Odpowiedzi .....                                                                         | 268        |

|                                                                                                                        |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 9. Zastosowanie całki podwójnej w mechanice .....                                                                      | 268        |
| Zadania przykładowe .....                                                                                              | 269        |
| Zadania do rozwiązania .....                                                                                           | 271        |
| Odpowiedzi .....                                                                                                       | 272        |
| <b>XIII. Całki krzywoliniowe na płaszczyźnie .....</b>                                                                 | <b>273</b> |
| 1. Całka krzywoliniowa nieorientowana, jej obliczanie oraz zastosowania .....                                          | 273        |
| Zadania przykładowe .....                                                                                              | 276        |
| Zadania do rozwiązania .....                                                                                           | 280        |
| Odpowiedzi .....                                                                                                       | 280        |
| 2. Całka krzywoliniowa zorientowana (krótco: całka krzywoliniowa) na płaszczyźnie, jej obliczanie i zastosowania ..... | 281        |
| Zadania przykładowe .....                                                                                              | 284        |
| Zadania do rozwiązania .....                                                                                           | 289        |
| Odpowiedzi .....                                                                                                       | 291        |
| 3. Twierdzenie Greena .....                                                                                            | 291        |
| Zadania przykładowe .....                                                                                              | 293        |
| Zadania do rozwiązania .....                                                                                           | 295        |
| Odpowiedzi .....                                                                                                       | 296        |
| 4. Niezależność całki krzywoliniowej od drogi całkowania. Całkowanie różniczki zupełnej .....                          | 296        |
| Zadania przykładowe .....                                                                                              | 298        |
| Zadania do rozwiązania .....                                                                                           | 303        |
| Odpowiedzi .....                                                                                                       | 304        |
| <b>XIV. Całka potrójna .....</b>                                                                                       | <b>307</b> |
| 1. Całka potrójna w obszarze regularnym .....                                                                          | 307        |
| 2. Całka potrójna w obszarze normalnym i jej obliczanie .....                                                          | 309        |
| Zadania przykładowe .....                                                                                              | 311        |
| Zadania do rozwiązania .....                                                                                           | 314        |
| Odpowiedzi .....                                                                                                       | 315        |
| 3. Zamiana zmiennych w całce potrójnej .....                                                                           | 315        |
| Zadania przykładowe .....                                                                                              | 316        |
| Zadania do rozwiązania .....                                                                                           | 324        |
| Odpowiedzi .....                                                                                                       | 325        |

|      |                                                                                                    |     |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.   | Pewne zastosowania całki potrójnej .....                                                           | 325 |
|      | Zadania przykładowe .....                                                                          | 326 |
|      | Zadania do rozwiązania .....                                                                       | 331 |
|      | Odpowiedzi .....                                                                                   | 332 |
| XV.  | <u>Całki krzywoliniowe w przestrzeni</u> .....                                                     | 333 |
| 1.   | Całka krzywoliniowa niezorientowana w przestrze-<br>ni i jej obliczanie .....                      | 333 |
|      | Zadania przykładowe .....                                                                          | 335 |
|      | Zadania do rozwiązania .....                                                                       | 336 |
|      | Odpowiedzi .....                                                                                   | 336 |
| 2.   | Całka krzywoliniowa zorientowana (krótko: krzy-<br>woliniowa) w przestrzeni i jej obliczanie ..... | 337 |
|      | Zadania przykładowe .....                                                                          | 338 |
|      | Zadania do rozwiązania .....                                                                       | 341 |
|      | Odpowiedzi .....                                                                                   | 342 |
| 3.   | Niezależność całki krzywoliniowej od drogi cał-<br>kowania. Całkowanie różniczki zupełnej .....    | 342 |
|      | Zadania przykładowe .....                                                                          | 344 |
|      | Zadania do rozwiązania .....                                                                       | 351 |
|      | Odpowiedzi .....                                                                                   | 352 |
| XVI. | <u>Elementy teorii pola wektorowego</u> .....                                                      | 353 |
| 1.   | Pole wektorowe .....                                                                               | 353 |
| 2.   | Gradient i potencjał .....                                                                         | 354 |
|      | Zadania przykładowe .....                                                                          | 355 |
|      | Zadania do rozwiązania .....                                                                       | 357 |
|      | Odpowiedzi .....                                                                                   | 358 |
| 3.   | Dywergencja (rozbieżność) i rotacja (wirowość)<br>pola wektorowego .....                           | 358 |
|      | Zadania przykładowe .....                                                                          | 360 |
|      | Zadania do rozwiązania .....                                                                       | 365 |
|      | Odpowiedzi .....                                                                                   | 366 |
| 4.   | Istnienie potencjału pola wektorowego i jego wy-<br>znaczanie .....                                | 367 |
|      | Zadania przykładowe .....                                                                          | 367 |
|      | Zadania do rozwiązania .....                                                                       | 371 |
|      | Odpowiedzi .....                                                                                   | 371 |