

# Spis treści

|                                                                                                |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Wpływ Archimedesesa na burzliwe życie liczby $\pi$ . . . . .                                | 17 |
| 1.1. Geometryczna metoda Archimedesesa obliczania przybliżonej wartości liczby $\pi$ . . . . . | 17 |
| 2. Wzór iloczynowy Viète'a . . . . .                                                           | 22 |
| 3. Wzór Wallisa . . . . .                                                                      | 26 |
| 4. Wzory Catalana i ich uogólnienia (wzory Pippengera i Sondoway-Yi) . . . . .                 | 33 |
| 5. Wzory typu Viète'a-Wallisa dla liczby $\pi$ . . . . .                                       | 37 |
| 5.1. Wzory typu Viète'a i Viète'a-Wallisa dla funkcji hiperbolicznych . .                      | 39 |
| 6. Wzór Gregorego-Leibniza-Nilakanthego . . . . .                                              | 43 |
| 6.1. Metody przyspieszania zbieżności szeregu Gregorego-Leibniza-Nilakanthego . . . . .        | 48 |
| 6.2. O pewnych uogólnieniach szeregu Gregorego . . . . .                                       | 56 |
| 6.3. Szereg funkcyjno-potęgowy „obejmujący” wzory Mercatora i Gregorego . . . . .              | 61 |
| 6.4. $q$ -odpowiednik wzoru Gregorego-Leibniza-Nilakanthego . . . . .                          | 63 |
| 7. Wzór Machina . . . . .                                                                      | 66 |
| 7.1. Związki $\pi$ ze złotą proporcją . . . . .                                                | 71 |
| 7.2. Dwie matryce do generowania wzorów opisujących skończone sumy arkusów tangensów . . . . . | 75 |
| 7.3. Twierdzenie Chamberlanda i Hermana . . . . .                                              | 76 |
| 7.4. Zależność asymptotyczna Hirschhorna . . . . .                                             | 77 |
| 8. Rozwinięcia $\pi$ w ułamki łańcuchowe . . . . .                                             | 78 |
| 9. Zapomniany ciąg ułamków łańcuchowych lorda Brounckera . .                                   | 82 |
| 10. Niewymierność liczby $\pi$ oraz jej przestępność . . . . .                                 | 85 |
| 11. Wybrane związki algebraiczne wiążące liczby $e$ oraz $\pi$ . . . . .                       | 91 |

|                                                                                                                                                                               |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>12. Ułamki łańcuchowe Rogersa-Ramanujana . . . . .</b>                                                                                                                     | <b>95</b>  |
| 12.1. Jeszcze dwie tożsamości Ramanujana, a w konsekwencji uwaga o postaci liczb $\zeta(4n+3)$ , $n \in \mathbb{N}$ . . . . .                                                 | 97         |
| <b>13. Minoranty oszacowań wymiernych liczby <math>\pi</math> – od Mahlera do Hatego . . . . .</b>                                                                            | <b>101</b> |
| <b>14. Aproksymacja <math>\pi</math> za pomocą całek . . . . .</b>                                                                                                            | <b>109</b> |
| 14.1. Całki Nielda . . . . .                                                                                                                                                  | 111        |
| 14.2. Całki Beukersa-Hatego . . . . .                                                                                                                                         | 114        |
| <b>15. Takakazu Seki i przekształcenie Aitkena . . . . .</b>                                                                                                                  | <b>116</b> |
| 15.1. Przekształcenie Aitkena . . . . .                                                                                                                                       | 117        |
| <b>16. Liczba <math>\pi</math> – probabilistycznie . . . . .</b>                                                                                                              | <b>119</b> |
| 16.1. Jeszcze raz o problemie Buffona o igle . . . . .                                                                                                                        | 122        |
| 16.2. Probabilistyczny dowód równości $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ . . . . .                                                                                                  | 123        |
| 16.3. O dwóch twierdzeniach probabilistycznych Hardy’ego i Wrighta . . . . .                                                                                                  | 126        |
| 16.4. Problem z zawodów matematycznych . . . . .                                                                                                                              | 128        |
| <b>17. Liczba <math>\pi</math> w trygonometrycznych szeregach Fouriera . . . . .</b>                                                                                          | <b>130</b> |
| 17.1. Zastosowania poznanych szeregów Fouriera do generowania całek . . . . .                                                                                                 | 134        |
| 17.2. Szeregi Fouriera z liczbami harmonicznymi jako współczynnikami . . . . .                                                                                                | 142        |
| 17.3. Szeregi Fouriera funkcji $\cos(ax)$ i $\sin(ax)$ oraz rozkłady funkcji kotangens, kosekans i sekans na ułamki proste . . . . .                                          | 145        |
| 17.3.1. Rozwinięcie w trygonometryczny szereg Fouriera funkcji $\sin^a x$ , $a > 0$ . . . . .                                                                                 | 147        |
| 17.4. Szeregi Fouriera generujące rozkłady liczby $\pi$ w szeregi sinus-harmoniczne . . . . .                                                                                 | 148        |
| 17.5. O sumach pewnych szeregów trygonometrycznych oraz liczbie elementów z $\mathbb{Z}$ w przedziałach $\subset \mathbb{R}$ o długości $k\pi$ , $k \in \mathbb{N}$ . . . . . | 154        |
| 17.6. Zastosowanie szeregu Fouriera (17.51) do wyznaczania sum pewnych szeregów naprzemiennych . . . . .                                                                      | 158        |
| 17.6.1. Jeszcze jedna atrakcyjna zależność . . . . .                                                                                                                          | 165        |
| 17.7. Szeregi Fouriera funkcji hiperbolicznych . . . . .                                                                                                                      | 166        |
| 17.8. O pewnych wynikach Pichoridesa . . . . .                                                                                                                                | 168        |
| <b>18. Zestaw oryginalnych wzorów i zależności związanych z liczbą <math>\pi</math> . . . . .</b>                                                                             | <b>171</b> |
| 18.1. Nierówność Jordana . . . . .                                                                                                                                            | 171        |
| 18.2. Nierówność Hilberta . . . . .                                                                                                                                           | 182        |
| 18.3. Nierówność Carlsona . . . . .                                                                                                                                           | 185        |
| 18.4. Szeregi związane z odwrotnościami centralnych współczynników dwumianowych . . . . .                                                                                     | 188        |
| 18.5. Ciąg i granica Lehmera . . . . .                                                                                                                                        | 192        |
| 18.6. Szereg lakunarny Hardy’ego . . . . .                                                                                                                                    | 193        |

|                                                                                                                    |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 18.7. Tożsamość Hermite'a (wzór interpolacyjny Hermite'a dla iloczynu ko-                                          | 195        |
| tangensów) . . . . .                                                                                               |            |
| 18.8. Nierówność dla sum liczb zespolonych . . . . .                                                               | 198        |
| <b>19. Algorytm Salamina . . . . .</b>                                                                             | <b>201</b> |
| 19.1. Algorytm Gaussa do obliczania całek eliptycznych . . . . .                                                   | 207        |
| 19.2. Moduł pierścienia Grötzscha oraz funkcja zniekształcająca $\phi_K$ . . .                                     | 213        |
| <b>20. Inne współczesne algorytmy wyznaczające wartość <math>\pi</math> . . . . .</b>                              | <b>216</b> |
| 20.1. Szeregi o sumie $\frac{1}{\pi}$ . . . . .                                                                    | 217        |
| <b>21. Uogólnienia liczby <math>\pi</math> z użyciem całki . . . . .</b>                                           | <b>219</b> |
| 21.1. Jeszcze jedno uogólnienie liczby $\pi$ i funkcji trygonometrycznych . .                                      | 227        |
| 21.1.1. Związek liczby $\pi_p$ z całkami $p$ -eliptycznymi . . . . .                                               | 229        |
| <b>22. Wybrane całki niewłaściwe związane z liczbą <math>\pi</math> . . . . .</b>                                  | <b>231</b> |
| 22.1. Całka Dirichleta i jej uogólnienia . . . . .                                                                 | 231        |
| 22.1.1. Nierówność Balla i asymptotyka wyrażenia $\sqrt{p} \int_0^\infty \left  \frac{\sin x}{x} \right ^p dx$ .   | 252        |
| 22.1.2. Całki Borweinów . . . . .                                                                                  | 252        |
| 22.1.3. Uwagi końcowe . . . . .                                                                                    | 258        |
| 22.1.4. Jeszcze jedna metoda obliczenia całki Dirichleta . . . . .                                                 | 259        |
| 22.2. Całki postaci $\int_0^\infty \frac{x^m}{x^n+1} dx$ . . . . .                                                 | 261        |
| 22.3. Całka de Moivre'a . . . . .                                                                                  | 265        |
| 22.3.1. Uogólnienia całki de Moivre'a . . . . .                                                                    | 273        |
| 22.4. Całki typu Fresnela . . . . .                                                                                | 274        |
| 22.5. Całki logarytmiczne związane z liczbą $\pi$ . . . . .                                                        | 281        |
| <b>23. Sinus całkowy i kosinus całkowy . . . . .</b>                                                               | <b>287</b> |
| 23.1. Dwie całki Laplace'a i ich związek z małym sinusem całkowym oraz                                             |            |
| małym kosinusem całkowym . . . . .                                                                                 | 291        |
| 23.2. Wymierne minoranty sinusa cardinalis . . . . .                                                               | 293        |
| 23.3. O zastosowaniu pewnej minoranty funkcji sinc do szacowania współ-                                            |            |
| czynników w subtelnym wariancie nierówności Carlemana . . . . .                                                    | 295        |
| <b>24. Problem izoperymetryczny Dido i równanie funkcyjne Dido . .</b>                                             | <b>299</b> |
| 24.1. Sensacyjna niespodzianka . . . . .                                                                           | 306        |
| <b>25. Szeregi o sumie <math>\frac{1}{\pi}</math>, <math>\pi^3</math> oraz przypisane im kongruencje . . . . .</b> | <b>308</b> |
| <b>26. Spektrum oraz funkcje własne laplasjanu Dirichleta . . . . .</b>                                            | <b>313</b> |
| 26.1. Podstawowe pojęcia . . . . .                                                                                 | 313        |
| 26.2. Laplasjan Dirichleta . . . . .                                                                               | 315        |
| 26.3. Spektrum i wektory własne operatora przewodnictwa cieplnego – uzu-                                           |            |
| pelnienie uwagi 17.2 . . . . .                                                                                     | 317        |

|                                                                                                            |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| A. Wystarczy niewymierność liczby $\pi$ . . . . .                                                          | 319 |
| B. Geometryczny dowód wzoru Machina . . . . .                                                              | 320 |
| C. Zadanie Laplace'a o igle . . . . .                                                                      | 322 |
| D. O pewnym zagadnieniu na ekstremum z geometrii . . . . .                                                 | 325 |
| E. Wybrane nierówności planimetryczne . . . . .                                                            | 327 |
| F. Zestaw wzorów na podobieństwo wzoru Machina . . . . .                                                   | 339 |
| G. Szeregi arkusów tangensów . . . . .                                                                     | 342 |
| H. Całki nawiązujące do teorii trygonometrycznych szeregów Fouriera . . . . .                              | 348 |
| I. Wzory typu BBP dla $\pi$ . . . . .                                                                      | 351 |
| J. Twierdzenie o różniczkowaniu po parametrze pod znakiem całki . . . . .                                  | 355 |
| K. O jednostajnej ciągłości całki oznaczonej względem przedziału całkowania . . . . .                      | 357 |
| L. Dowód anonsowanej tożsamości (22.46) . . . . .                                                          | 362 |
| M. Twierdzenie Mordella . . . . .                                                                          | 367 |
| N. O zbieżności wielomianów Wallisa według Wallisa i o teorii granic według Cauchy'ego i Wallisa . . . . . | 371 |
| Bibliografia . . . . .                                                                                     | 373 |
| Oznaczenia . . . . .                                                                                       | 401 |
| Skorowidz nazwisk . . . . .                                                                                | 404 |
| Skorowidz nazw . . . . .                                                                                   | 408 |
| Streszczenie . . . . .                                                                                     | 413 |