

# SPIS TREŚCI

## ARYTMETYKA I TEORIA LICZB

|                                                |    |
|------------------------------------------------|----|
| Wybrane stałe matematyczne . . . . .           | 11 |
| Pozycyjne sposoby zapisywania liczb . . . . .  | 11 |
| Liczby rzeczywiste i ich własności . . . . .   | 12 |
| Definicje liczb rzeczywistych . . . . .        | 13 |
| Potęgi i silnie . . . . .                      | 14 |
| Wielkie liczby . . . . .                       | 15 |
| Sposoby przedstawiania ułamków . . . . .       | 16 |
| Właściwości ułamków i proporcji . . . . .      | 17 |
| Podstawowe pojęcia teorii                      |    |
| podzielności . . . . .                         | 18 |
| Właściwości kongruencji . . . . .              | 20 |
| Szczególne rodzaje liczb naturalnych . . . . . | 21 |
| Funkcje związane z podzielnością               |    |
| liczb i rozkładem liczb pierwszych . . . . .   | 23 |
| Rozkład liczb pierwszych . . . . .             | 24 |
| Testy liczb pierwszych . . . . .               | 25 |
| Przegląd liczb pierwszych . . . . .            | 26 |
| Przykłady równań diofantycznych . . . . .      | 30 |
| Liczby algebraiczne i przestępne . . . . .     | 31 |
| Oceny wartości liczby $\pi$ . . . . .          | 32 |
| Sposoby obliczania liczby $\pi$ . . . . .      | 34 |
| Liczba $e$ . . . . .                           | 37 |
| Liczba $\phi$ . . . . .                        | 38 |
| Wybrane związki między liczbami                |    |
| $\pi, e, \phi$ . . . . .                       | 38 |
| Inne ciekawe stałe matematyczne . . . . .      | 39 |
| Najbardziej znane problemy                     |    |
| teorii liczb . . . . .                         | 40 |

## WIELOMIANY, RÓWNANIA, PROSTE FUNKCJE

|                                             |    |
|---------------------------------------------|----|
| Potęgowanie i pierwiastkowanie . . . . .    | 44 |
| Funkcje niewymierne . . . . .               | 45 |
| Tablica pierwiastków kwadratowych . . . . . | 46 |
| Tablica pierwiastków sześciennych . . . . . | 48 |

|                                               |    |
|-----------------------------------------------|----|
| Ogólne właściwości wielomianów . . . . .      | 50 |
| Ilorazy wielomianów i funkcje                 |    |
| wymierne . . . . .                            | 52 |
| Funkcja wykładnicza . . . . .                 | 54 |
| Logarytmy . . . . .                           | 55 |
| Tablica logarytmów naturalnych . . . . .      | 55 |
| Tablica logarytmów dziesiętnych . . . . .     | 56 |
| Antylogarytmy . . . . .                       | 58 |
| Równania . . . . .                            | 59 |
| Nierówności . . . . .                         | 63 |
| Układy równań liniowych . . . . .             | 64 |
| Równania przestępne . . . . .                 | 66 |
| Numeryczne sposoby rozwiązywania              |    |
| równań . . . . .                              | 67 |
| Technika wykonywania działań . . . . .        | 68 |
| Działania na liczbach przybliżonych . . . . . | 70 |
| Średnie . . . . .                             | 71 |

## TRYGONOMETRIA

|                                              |    |
|----------------------------------------------|----|
| Funkcje trygonometryczne . . . . .           | 72 |
| Funkcje cyklometryczne (kołowe) . . . . .    | 76 |
| Wykresy funkcji trygonometrycznych           |    |
| i cyklometrycznych . . . . .                 | 78 |
| Tablica funkcji trygonometrycznych . . . . . | 79 |
| Podstawy trygonometrii sferycznej . . . . .  | 84 |
| Rozwiązywanie dowolnych trójkątów            |    |
| sferycznych . . . . .                        | 85 |
| Trójkąty sferyczne prostokątne . . . . .     | 86 |

## CIĄGI I SZEREGI

|                                              |    |
|----------------------------------------------|----|
| Ciągi — podstawowe definicje . . . . .       | 87 |
| Granice ciągów . . . . .                     | 88 |
| Ciąg arytmetyczny, geometryczny              |    |
| i inne proste ciągi i szeregi . . . . .      | 90 |
| Najważniejsze właściwości szeregów . . . . . | 91 |
| Sposoby sumowania szeregów . . . . .         | 92 |
| Sumowanie uogólnione . . . . .               | 93 |

|                                          |     |
|------------------------------------------|-----|
| Sumy wybranych szeregów liczbowych       | 94  |
| Kryteria zbieżności szeregów             |     |
| liczbowych . . . . .                     | 96  |
| Ciągi i szeregi funkcyjne . . . . .      | 100 |
| Właściwości szeregów potęgowych.         | 102 |
| Rozwinięcia niektórych funkcji           |     |
| w szeregi potęgowe . . . . .             | 104 |
| Nieskończone iloczyny . . . . .          | 107 |
| Rozwinięcia funkcji w ułamki łańcuchowe, |     |
| szeregi ułamków prostych i inne .        | 109 |
| Szeregi Fouriera . . . . .               | 111 |
| Interpolacja funkcji . . . . .           | 115 |

## **RACHUNEK RÓŻNICZKOWY**

|                                        |     |
|----------------------------------------|-----|
| Sposoby definiowania funkcji . . .     | 117 |
| Granica i pochodna funkcji . . . .     | 118 |
| Podstawy rachunku różniczkowego.       | 119 |
| Funkcje o szczególnym zachowaniu       | 122 |
| Funkcje wielu zmiennych                |     |
| i pochodne cząstkowe . . . . .         | 123 |
| Różniczkowanie przybliżone . . . .     | 124 |
| Podstawy rachunku całkowego . . .      | 125 |
| Podstawowe zastosowania rachunku       |     |
| różniczkowego i całkowego . . .        | 127 |
| Obliczanie całek nieoznaczonych . .    | 128 |
| Tabela całek nieoznaczonych . . . .    | 129 |
| Obliczanie całek oznaczonych . . . .   | 135 |
| Niektóre całki oznaczone . . . . .     | 136 |
| Całkowanie przybliżone . . . . .       | 137 |
| Całki wielokrotne, krzywoliniowe       |     |
| i powierzchniowe . . . . .             | 140 |
| Równania różniczkowe zwyczajne . .     | 142 |
| Równania różniczkowe cząstkowe . .     | 148 |
| Równania całkowite . . . . .           | 149 |
| Pola wektorowe i operatory . . . . .   | 150 |
| Formy różniczkowe . . . . .            | 151 |
| Rachunek wariacyjny . . . . .          | 152 |
| Transformacje całkowite . . . . .      | 154 |
| Delta Diraca i jej własności . . . . . | 156 |
| Szukanie minimów i maksimów            |     |
| funkcji . . . . .                      | 157 |

## **GEOMETRIA KLASYCZNA NA PŁASZCZYŹNIE**

|                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| Podstawowe definicje i twierdzenia.  | 160 |
| Najprostsze figury geometryczne. . . | 162 |
| Kąty . . . . .                       | 164 |
| Koło i jego części. . . . .          | 165 |
| Klasyfikacja wielokątów . . . . .    | 168 |
| Trójkąty . . . . .                   | 169 |
| Czworokąty . . . . .                 | 175 |
| Wielokąty foremne . . . . .          | 178 |
| Wybrane właściwości ekstremalne      |     |
| figur na płaszczyźnie . . . . .      | 180 |
| Konstrukcje geometryczne —           |     |
| zagadnienia ogólne . . . . .         | 181 |
| Najważniejsze konstrukcje klasyczne  | 182 |
| Wybrane przyrządy pomocnicze . . .   | 189 |
| Konstrukcje przybliżone . . . . .    | 190 |

## **GEOMETRIA KLASYCZNA W PRZESTRZENI**

|                                       |     |
|---------------------------------------|-----|
| Podstawowe zagadnienia stereometrii   | 194 |
| Kąty w przestrzeni . . . . .          | 196 |
| Kula i jej części . . . . .           | 197 |
| Walce i stożki . . . . .              | 198 |
| Inne bryły krzywoliniowe . . . . .    | 199 |
| Wielościany — informacje ogólne . .   | 200 |
| Czworościany . . . . .                | 201 |
| Graniastosłupy, ostrosłupy            |     |
| i bryły pokrewne . . . . .            | 202 |
| Wielościany szczególnie regularne . . | 204 |
| Siatki wybranych wielościanów . . .   | 206 |
| Zagadnienie wypełniania przestrzeni   | 207 |
| Wielościany foremne . . . . .         | 208 |
| Wielościany foremne gwiaździste . .   | 209 |
| Wielościany półforemne . . . . .      | 210 |
| Inne interesujące wielościany . . . . | 215 |
| Wybrane zagadnienia geometrii         |     |
| wielowymiarowej. . . . .              | 216 |

## **PODSTAWY GEOMETRII ANALITYCZNEJ**

|                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------|-----|
| Rachunek wektorowy . . . . .                                        | 217 |
| Równania prostej . . . . .                                          | 219 |
| Równania płaszczyzny . . . . .                                      | 221 |
| Wzajemne rozmieszczenie punktów,<br>prostych i płaszczyzn . . . . . | 222 |
| Wielokąty i wielościany . . . . .                                   | 225 |
| Formy kwadratowe w $R^2$ i $R^3$ . . . . .                          | 226 |

## **PRZEKSZTAŁCENIA GEOME- TRYCZNE**

|                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Macierzowa reprezentacja<br>przekształceń . . . . .                          | 227 |
| Przekształcenia płaszczyzny . . . . .                                        | 228 |
| Symetrie płaszczyzny i parkietaże . . . . .                                  | 230 |
| Przekształcenia przestrzeni . . . . .                                        | 232 |
| Rzuty na płaszczyznę i wybrane<br>zagadnienia geometrii wykreślnej . . . . . | 234 |
| Wybrane zagadnienia geometrii<br>rzutowej . . . . .                          | 236 |
| Odwzorowania sfery na płaszczyznę . . . . .                                  | 237 |

## **GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA NA PŁASZCZYŹNIE**

|                                                        |     |
|--------------------------------------------------------|-----|
| Równania krzywych płaskich . . . . .                   | 238 |
| Wielkości charakteryzujące krzywe<br>płaskie . . . . . | 239 |
| Badanie przebiegu zmienności funkcji . . . . .         | 242 |
| Elementarne przekształcenia funkcji . . . . .          | 243 |
| Krzywe otrzymywane z innych<br>krzywych . . . . .      | 244 |
| Elipsa, parabola, hiperbola . . . . .                  | 246 |
| Przegląd krzywych płaskich . . . . .                   | 248 |

## **GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA W PRZESTRZENI**

|                                              |     |
|----------------------------------------------|-----|
| Układy współrzędnych w przestrzeni . . . . . | 258 |
| Badanie krzywych przestrzennych . . . . .    | 259 |

|                                                      |     |
|------------------------------------------------------|-----|
| Wybrane krzywe przestrzenne . . . . .                | 260 |
| Wielkości charakteryzujące<br>powierzchnie . . . . . | 262 |
| Najciekawsze powierzchnie . . . . .                  | 265 |

## **TOPOLOGIA I DZIAŁY POKREWNE**

|                                                                          |     |
|--------------------------------------------------------------------------|-----|
| Podstawowe pojęcia topologii<br>i pokrewnych działów geometrii . . . . . | 269 |
| Wybrane twierdzenia topologii<br>i analizy funkcjonalnej . . . . .       | 271 |
| Ciekawe obiekty topologiczne<br>i geometryczne . . . . .                 | 274 |
| Przegląd przestrzeni topologicznych . . . . .                            | 276 |
| Najczęściej rozpatrywane<br>przestrzenie funkcyjne . . . . .             | 280 |

## **LICZBY ZESPOLONE**

|                                                      |     |
|------------------------------------------------------|-----|
| Liczby zespolone . . . . .                           | 282 |
| Właściwości funkcji zmiennej<br>zespolonej . . . . . | 283 |
| Wybrane funkcje zespolone . . . . .                  | 286 |

## **FUNKCJE SPECJALNE**

|                                                   |     |
|---------------------------------------------------|-----|
| Funkcja gamma . . . . .                           | 287 |
| Funkcje hiperboliczne . . . . .                   | 288 |
| Najważniejsze wielomiany<br>ortogonalne . . . . . | 290 |
| Inne funkcje specjalne . . . . .                  | 293 |

## **MACIERZE I ICH ZASTOSOWANIA**

|                                                                          |     |
|--------------------------------------------------------------------------|-----|
| Macierze i ich rodzaje . . . . .                                         | 296 |
| Działania na macierzach, funkcje<br>i przekształcenia macierzy . . . . . | 298 |
| Wyznaczniki . . . . .                                                    | 301 |
| Odwracanie macierzy . . . . .                                            | 303 |
| Diagonalizacja macierzy . . . . .                                        | 304 |
| Sprowadzanie macierzy<br>do określonej postaci . . . . .                 | 306 |

## **LOGIKA, ZBIORY, ALGEBRA**

|                                     |     |
|-------------------------------------|-----|
| Systemy aksjomatyczne . . . . .     | 307 |
| Logika i rachunek zbiorów . . . . . | 308 |

|                                                              |     |
|--------------------------------------------------------------|-----|
| Niektóre właściwości zbiorów nieskończonych . . . . .        | 312 |
| Relacje . . . . .                                            | 314 |
| Sposoby wprowadzania struktury w zbiorach . . . . .          | 315 |
| Podstawowe struktury algebraiczne. . . . .                   | 316 |
| Wyróżnione elementy struktur algebraicznych . . . . .        | 319 |
| Morfizmy (przekształcenia struktur algebraicznych) . . . . . | 320 |
| Grupy . . . . .                                              | 321 |
| Przestrzenie wektorowe . . . . .                             | 323 |

## **KOMBINATORYKA**

### **I TEORIA GRAFÓW**

|                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------|-----|
| Kombinatoryka. . . . .                                             | 324 |
| Symbol Newtona i jego właściwości . . . . .                        | 326 |
| Liczby Bernoullego i Eulera . . . . .                              | 327 |
| Liczby Stirlinga i inne liczby przydatne w kombinatoryce . . . . . | 328 |
| Grafy — podstawowe definicje . . . . .                             | 330 |
| Działania i relacje na grafach . . . . .                           | 331 |
| Rodzaje grafów prostych . . . . .                                  | 332 |
| Klasyczne zagadnienia teorii grafów i kombinatoryki . . . . .      | 334 |

## **RACHUNEK**

### **PRAWDOPODOBIENSTWA**

|                                                              |     |
|--------------------------------------------------------------|-----|
| Podstawy rachunku prawdopodobieństwa . . . . .               | 336 |
| Sposoby definiowania rozkładów prawdopodobieństwa. . . . .   | 338 |
| Podstawowe funkcje zmiennych losowych . . . . .              | 339 |
| Najważniejsze rozkłady prawdopodobieństwa . . . . .          | 340 |
| Ważniejsze twierdzenia rachunku prawdopodobieństwa . . . . . | 342 |
| Generowanie liczb losowych . . . . .                         | 344 |
| Tabela liczb losowych . . . . .                              | 347 |
| Procesy stochastyczne . . . . .                              | 348 |

## **STATYSTYKA MATEMATYCZNA**

|                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Podstawowe pojęcia używane w statystyce matematycznej . . . . .                      | 349 |
| Najczęstsze błędy w stosowaniu statystyki matematycznej . . . . .                    | 350 |
| Teoria estymacji . . . . .                                                           | 352 |
| Estymatory najważniejszych parametrów . . . . .                                      | 354 |
| Wybrane testy istotności . . . . .                                                   | 358 |
| Wybrane testy zgodności rozkładów . . . . .                                          | 361 |
| Rozkłady prawdopodobieństwa najczęściej używane w statystyce matematycznej . . . . . | 364 |
| Przykłady zastosowania testów . . . . .                                              | 365 |
| Regresja liniowa . . . . .                                                           | 366 |
| Przegląd wybranych działów statystyki . . . . .                                      | 369 |
| Tablice rozkładu normalnego . . . . .                                                | 370 |
| Tablice rozkładu Studenta . . . . .                                                  | 372 |
| Wartości krytyczne rozkładu $\chi^2$ . . . . .                                       | 374 |
| Wartości krytyczne rozkładu $F$ . . . . .                                            | 376 |
| Tablice innych testów statystycznych . . . . .                                       | 380 |

## **UZUPEŁNIENIA**

|                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------|-----|
| Wybrane sposoby graficznego przedstawiania danych liczbowych . . . . . | 383 |
| Wybrane zagadnienia z ekonomii . . . . .                               | 384 |
| Elementy teorii gier . . . . .                                         | 388 |
| Podstawowe pojęcia metod numerycznych . . . . .                        | 391 |
| Historycznie ważne sposoby zapisu liczb . . . . .                      | 392 |
| Symbole stosowane w matematyce . . . . .                               | 393 |
| Z dziejów matematyki . . . . .                                         | 395 |
| Skorowidz rzeczowy . . . . .                                           | 400 |
| Literatura . . . . .                                                   | 406 |